Das räumliche Fünfeck.

Inaugural-Dissertation,

welche

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung der hohen

philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

Mittwoch, den 23. Dezember 1903, vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Adalbert Grüttner.

Opponenten:

Herr cand. phil. **Erich Wiek,**

Herr Referendar **Hans Werther.**

Breslau

Buchdruckerei H. Fleischmann

1903.

Dem Andenken meines Vaters.

Die elementaren Eigenschaften des räumlichen Fünfecks. [1])

1. P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 seien 5 Punkte im Raume. Sie bilden mit ihren 10 Verbindungsebenen von je dreien und ebensovielen Verbindungsgeraden von je zweien ein räumliches Fünfeck (P). Wir bezeichnen die 10 Ebenen als Seitenebenen, geben ihnen den Buchstaben ε und charakterisieren irgend eine von ihnen, indem wir ihr die Zeiger derjenigen beiden Ecken als Zeiger geben, durch welche sie nicht geht. Eine Verbindungsgerade von 2 Ecken nennen wir Kante und geben ihr die Bezeichnung k_{ij}, wenn sie P_i und P_j enthält. Von ε_{ij} und k_{ij} sagen wir, sie liegen einander gegenüber.

Von jeder Ecke P geht ein vollständiges Vierkant nach den anderen Ecken. Durch P gehen also 4 Geraden k und 6 Ebenen ε, und durch P gehen nicht 6 Kanten uud 4 Seitenebenen. — In jeder Seitenebene liegen 3 Ecken und 3 Kanten, 6 weitere Kanten gehen durch die Ecken der Ebene; die letzte Kante ist die Gegenkante der Ebene.

Jede Seitenebenen ε_{ij} wird von ihrer Gegenkante k_{ij} in einem Punkte D_{ij} durchstossen, den wir als Diagonalpunkt bezeichnen. Es gibt 10 Diagonalpunkte.

---

[1]) In der Strassburger Dissertation des Herrn Himpel „Über die Gruppe der 120 Collineationen, durch die ein räumliches Fünfeck in sich selbst übergeht", 1903, findet sich in § 1 auch einiges über das Fünfeck. Auf die Abhandlung des Herrn Ciani „Sul pentaedro completo" (Atti della Acc. dei Lincei, 1891, Band 4, erste Hälfte S. 209.) kommen wir noch an mehreren Stellen zu sprechen. Wir werden bei unsern Bezeichnungen auch immer die dualen des Herrn Ciani vermerken.

2. Zwei Seitenebenen können eine oder keine Ziffer gemein haben. Im ersten Falle ist ihre Schnittlinie eine Kante im zweiten nennen wir sie Diagonale[1]). Durch jede der fünf Ecken gibt es 3 Diagonalen; sie sind zugleich Diagonalen des erwähnten vollständigen Vierkants. Wir bezeichnen z. B. die Diagonale, in welcher sich ε_{12} und ε_{45} scheiden, mit $d_{12,45}$. — In jeder Seitenebene liegen 3 Diagonalen.

Jede Diagonale geht durch die beiden Pnnkte D, deren Ziffernpaare im Zeiger der Diagonale stehen.

Es gibt 15 Diagonalen:

$d_{23,45}$,	$d_{24,35}$,	$d_{25,34}$;	P_1
$d_{13,45}$,	$d_{14,35}$,	$d_{15,34}$;	P_2
$d_{12,45}$,	$d_{14,25}$,	$d_{15,42}$;	P_3
$d_{12,35}$,	$d_{13,25}$,	$d_{15,23}$;	P_4
$d_{12,34}$,	$d_{13,24}$,	$d_{14,23}$.	P_5

Je zwei Diagonalen durch dieselbe Ecke bestimmen eine Ebene, die wir mit τ bezeichnen[2]). Wir bekommen also 15 Ebenen τ, die Diagonalebenen unserer 5 vollständigen Vierkante. Jede erhält als Zeiger den Zeiger der im zugehörigen Diagonaldreikant gegenüberliegenden Gerade d. So liegen in der Ebene $\tau_{12,34}$ die Geraden $d_{13,24}$ und $d_{14,23}$.

Zwei Diagonalen schneiden sich, wenn sie entweder durch dieselbe Ecke gehen oder in derselben Seitenebene liegen. Das können wir auch so aussprechen:

I. *Zwei Diagonalen, deren Zeiger dieselben 4 Ziffern enthalten, schneiden einander und zwar in der Ecke, deren Ziffer in beiden Namen nicht vorkommt, und in der Ebene τ, deren Zeiger mit der dritten Diagonale durch diese Ecke übereinstimmt.*

II. *Zwei Diagonalen, deren Zeiger in einem der beiden Ziffernpaare übereinstimmen, schneiden einander in dem zu diesem Ziffernpaare gehörenden Diagonalpunkte und in der gleichzeigrigen Ebene ε.*

---

[1]) Bei Herrn Ciani: retta diagonale di prima specie.

[2]) Bei Ciani dual: punto diagonale di prima specie.

Die 3 in einer Seitenebene gelegenen Geraden d gehen daher auch durch denselben Punkt, den Diagonalpunkt nämlich, welcher mit der Seitenebene gleichen Zeiger hat.

III. *Zwei Diagonalen, die keine der Bedingungen von Satz I und II erfüllen, gehen durch verschiedene Punkte D und liegen in verschiedenen Ebenen ε, sind also windschief zueinander.*

3. Da es zu jeder Gerade d noch 2 gibt, welche mit ihr durch dieselbe Ecke gehen, ferner 4, welche mit ihr in derselben Seitenebene liegen, so gibt es $14 - 6 = 8$ windschiefe Diagonalen zu ihr. Je 2 von diesen 8 Geraden gehen durch eine der 4 übrigen Ecken. Solche 8 Diagonalen zerfallen in 2 Quadrupel von windschiefen Geraden. Nehmen wir z. B. $d_{23,45}$ als Ausgangsgerade, so bekommen wir die beiden Quadrupel

$$d_{13,45},\quad d_{15,24},\quad d_{12,35},\quad d_{14,23}$$
$$d_{14,35},\quad d_{12,45},\quad d_{15,23},\quad d_{13,24}.$$

Aus den Sätzen von Nr. 2 ergibt sich nun, dass jede Gerade des einen Quadrupels 3 Geraden des andern trifft. So trifft $d_{13,45}$ die $d_{14,35}$ in P_2, die $d_{12,45}$ in D_{45}, die $d_{13,24}$ in D_{13}. Wir können die beiden Quadrupel so hinschreiben, dass jede Gerade die nicht horizontal oder vertikal mit ihr stehenden trifft:

$$d_{13,45},\quad d_{15,24},\quad d_{12,35},\quad d_{14,23};$$
$$d_{15,23},\quad d_{14,35},\quad d_{13,24},\quad d_{12,45}.$$

Die Konfiguration solcher 8 Geraden ist also eine Doppelvier. Da jede dieser Doppelvieren zu einer Gerade d gehört, so gibt es 15 solcher Doppelvieren.

Jedes der beiden Quadrupel, in welche eine Doppelvier zerfällt, können wir mit der Ausgangsgerade d zusammenstellen und erhalten so zwei Quintupel von Geraden d aus einer jeden Diagonale. Keine Gerade d kann in mehr als 2 Quintupeln vorkommen, denn es lassen sich nur 2 Quadrupel aus den 8 Geraden bilden. Wir erhalten also im ganzen $\frac{15 \cdot 2}{5} = 6$ Quintupel.

Aus den 15 Diagonalen des räumlichen Fünfecks lassen sich 6 Quintupel von windschiefen Geraden bilden. Sie sind auf Tafel I zusammengestellt. Die dort gebrauchten Bezeichnungen Q_0, Q_1, ... werden später erklärt. Auch der Grund, warum gewisse Geraden markiert sind, wird dann erhellen.

Es ergeben sich aus der Betrachtung der 6 Quintupel die Sätze:

I. *Jede der 15 Diagonalen kommt in zweien der Quintupel vor.*

II. *Je 2 Quintupel haben eine und nur eine Gerade gemein.*

III. *Jedes Dupel von windschiefen Diagonalen kommt in einem und demselben Quintupel vor.*

IV. *In jedem Quintupel kommt eine Gerade d durch jede Ecke vor.*

4. Jeder Diagonalpunkt wird mit den 9 anderen durch 9 Geraden verbunden, von denen nur 3 Diagonalen sind. Die 6 andern Verbindungsgeraden bezeichnen wir durch s, nennen sie Diagonalstrahlen[1]) und geben derjenigen, welche D_{ik} und D_{il} verbindet, den Zeiger i, kl. — D_{12} und D_{13} werden durch $s_{1,23}$ verbunden. Durch D_{12} gehen $d_{12,34}$, $d_{12,35}$, $d_{12,45}$. Durch D_{13} gehen $d_{13,24}$, $d_{13,25}$, $d_{13,45}$. Die 3 ersten Diagonalen liegen mit den an entsprechender Stelle stehenden zweiten bzw. in den Ebenen $\tau_{14,32}$, $\tau_{15,23}$, ε_{45}. Diese 3 Ebenen müssen also durch $s_{1,23}$ gehen.

Wir bekommen hieraus die Sätze:

I. *Eine Gerade s liegt in der Ebene* ε, *die keine Zeigerziffer mit ihr gemein hat.*

II. *Eine Gerade s liegt in den beiden Ebenen* τ, *welche als ein Ziffernpaar das Ziffernpaar von s haben, und in deren anderm Paare die erste Ziffer von s enthalten ist.*

In ε_{45} gibt es ausser $s_{1,23}$ noch 2 Linien s, nämlich $s_{2,13}$ und $s_{3,12}$. Auch durch jeden von diesen beiden Diagonalstrahlen geht je eine Ebene τ der Ecken P_4 und P_5. Wir

[1]) Bei Herrn Ciani: rette diagonali di seconda specie.

bekommen mithin die Ebenen τ durch die Ecken P_4 und P_5 derart zu 3 Paaren geordnet, dass immer durch die Doppelgerade eines Paares die Ebene ε_{45} geht. Die Diagonaldreiflache der beiden vollständigen Vierkante durch P_4 und P_5 liegen also perspektiv mit ε_{45} als Perspektivitätsebene. Die 3 Paare entsprechender Diagonalen müssen daher ihre Verbindungsebenen durch eine und dieselbe Gerade schicken. k_{45} erweist sich als Perspektivitätsaxe.

Zwei Ebenen τ, die sich in einer Gerade schneiden, nennen wir „verbundene Ebenen τ." Wir haben dann durch P_4 und P_5 die folgenden 3 Paare von verbundenen Ebenen τ.

$\tau_{12,34}$ und $\tau_{12,35}$ mit der Doppelgerade $s_{3,12}$,
$\tau_{13,24}$ und $\tau_{13,25}$ mit der Doppelgerade $s_{2,13}$,
$\tau_{14,23}$ und $\tau_{15,23}$ mit der Doppelgerade $s_{1,23}$.

Hieraus ergibt sich die Regel:

Mit einer Ebene τ durch eine Ecke ist diejenige durch eine andere verbunden, deren Zeiger durch Einsetzung der Ziffer der alten Ecke an die Stelle der Ziffer der neuen aus dem Zeiger der ersten hervorgeht. — Die Schnittgerade s zweier verbundnen Ebenen τ hat im Zeiger als Ziffernpaar die Ziffern des den beiden Ebenen τ gemeinsamen Paares, als erste Ziffer die den beiden andern Zeigerpaaren gemeinsame Ziffer.

5. Eine Ebene τ enthält 4 Punkte D, die auf den beiden Diagonalen in τ. Es liegen z. B. in $\tau_{14,35}$ die Punkte D_{13}, D_{15}, D_{34}, D_{35}. $\tau_{14,35}$ darf keinen weitern Punkt D enthalten. Denn läge etwa D_{12} in unserer Ebene, so müsste ja die ganze Gerade $d_{12,34}$ in ihr liegen. Dies ist nach Nr. 2, Satz III ausgeschlossen. Ebenso ist es bei D_{23}, D_{24}, D_{25}. Läge D_{14} in $\tau_{14,35}$, so befände sich, da diese Ebene auch P_1 enthält, k_{14} ganz in ihr. Auch das ist unmöglich, da dann $\tau_{14,35}$ mit ε_{35} zusammenfiele. Ähnlich ist es bei D_{35}. Also

I. *In jeder Ebene τ befinden sich stets nur 4 Punkte D, nämlich die auf den beiden Geraden D in τ.*

Diese 4 Punkte haben ausser den Diagonalen noch 4 Verbindungslinien, nnd das sind also Geraden s. So

liegen in $\tau_{23,45}$ die Geraden $s_{2,45}$, $s_{3,45}$, $s_{4,23}$ $s_{5,23}$. Sie sind bzw. die Schnittgeraden von $\tau_{23,45}$ mit $\tau_{12,45}$, $\tau_{13,45}$, $\tau_{14,23}$, $\tau_{15,23}$ (Nr. 4, Satz II). Da $s_{2,45}$ und $s_{3,45}$ einander schneiden, und auch allgemein gilt, dass 2 Geraden s, deren Zeiger in dem Paare übereinstimmen, einander schneiden, so erhalten wir in jeder Ebene τ ausser den 4 Punkten D noch 2 neue Schnittpunkte von Geraden s, denen wir den Buchstaben E geben. — Es liegen nun die 3 Geraden $s_{3,45}$, $s_{2,45}$ $s_{1,45}$ bzw. in den Ebenen ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}, die alle drei durch k_{45} gehen. Der Schnittpunkt je zweier von den 3 Geraden s liegt also auf k_{45}. Daraus folgt, dass diese 3 Geraden sich auf k_{45} treffen in einem Punkte, den wir mit E_{45} bezeichnen, und wir erhalten den Satz:

II. *Je 3 Geraden s, deren Zeiger im Ziffernpaare übereinstimmen, schneiden sich in einem Punkte der Kante, welche dasselbe Zeigerpaar besitzt.*

III. *Wir erhalten auf jeder Kante einen solchen Treffpunkt, und es gibt daher 10 Punkte E*[1]).

6. Wir betrachten nun die ebene Figur, welche in ε_{45} durch unsre Elemente hervorgerufen wird. Da haben wir zunächst das Dreieck $P_1\ P_2\ P_3$ mit den Seiten k_{12}, k_{23}, k_{13}. Von jeder Ecke, etwa P_1, geht eine Diagonale aus, hier $d_{23,45}$, als Verbindungsgerade der Ecke mit dem auf der Gegenseite liegenden Diagonalpunkte, hier D_{23}. Es liegen also in ε_{45} die Geraden $d_{12,45}$, $d_{13,45}$, $d_{23,45}$, die alle durch D_{45} gehen. Diesem Punkte entspricht nun in der Polarität unsres Dreiecks eine Gerade, f_{45}, welche die 3 harmonisch zugeordneten Punkte zu D_{12}, D_{13}, D_{23} in bezug auf die Paare P_1, P_2, bezw. P_1, P_3, bezw. P_2, P_3 verbindet. Durch diese 3 Punkte gehen aber, das folgt sofort aus der Figur, bezw. die 3 in ε_{45} liegenden Diagonalstrahlen $s_{3,12}$, $s_{2,13}$, $s_{1,23}$. Das heisst, f_{45} enthält die Punkte E_{12}, E_{13}, E_{23}. Also:

Je 3 in derselben Seitenebene gelegene Punkte E liegen in einer Gerade f, der wir den Zeiger der Seitenebene geben. Es giebt 10 Geraden f[2]).

---

[1]) Bei Herrn Ciani dual: piani armonici.

[2]) Ciani: assi triarmonici.

7. Zwei Geraden $\mathfrak{k}$, etwa $\mathfrak{k}_{12}$ und $\mathfrak{k}_{13}$, die einen Punkt E, hier E_{45}, gemein haben, liegen in einer Ebene, die wir mit π bezeichnen. In π liegen dann ausser E_{45} noch E_{34}, E_{35}, E_{24}, E_{25}. E_{34} und E_{24} werden durch $\mathfrak{k}_{15}$, E_{35} und E_{25} durch $\mathfrak{k}_{14}$ verbunden. Da $\mathfrak{k}_{14}$ und $\mathfrak{k}_{15}$ sich in E_{23} schneiden, so enthält π im ganzen 4 Geraden $\mathfrak{k}$ und 6 Punkte E. Die Ziffer 1 kommt in den Zeigern aller 4 Geraden $\mathfrak{k}$ vor und fehlt bei allen 6 Punkten E; wir bezeichnen daher unsere Ebene mit π_1. Auf diese Weise erhalten wir 5 Ebenen π mit den Zeigern 1 bis 5. Je zwei, etwa π_4 und π_5, schneiden sich in einer Gerade $\mathfrak{k}$, hier $\mathfrak{k}_{45}$; je drei, etwa π_1, π_2, π_3, gehen durch einen Punkt E, hier E_{45}. Wir haben es also mit einem Fünfflach zu tun, dessen Kanten die Geraden $\mathfrak{k}$, dessen Ecken die Punkte E sind. Als Diagonalen $\mathfrak{d}$ des Fünfflachs erhalten wir die 15 Verbindungslinien je zweier Ecken E, die in keinem Zeiger übereinstimmen. Wir haben den Satz:

Die 5 Ebenen π[1]) *bilden ein Fünfflach* (π) *mit den Kanten* $\mathfrak{k}$, *den Ecken E, den Diagonalen* $\mathfrak{d}$[2]).

8. Der Punkt E_{23} liegt auf $s_{4,23}$ und daher in der Ebene $\tau_{23,45}$. Also:

I. Jeder Punkt E liegt in denjenigen 3 Ebenen τ, *deren Zeiger das Ziffernpaar von E als Paar enthalten.*

Da nun E_{23} und E_{45} durch $\mathfrak{d}_{23,45}$ verbunden werden, so besteht ferner der Satz:

II. Jede Gerade $\mathfrak{d}$ *liegt in der* τ *mit gleichem Zeiger, trifft also diejenigen beiden Geraden* $\mathfrak{d}$, *deren Zeiger dieselben Ziffern enthält wie der von* $\mathfrak{d}$, *aber in anderer Anordnung.* So liegt $\mathfrak{d}_{23,45}$ in $\tau_{23,45}$ und trifft $d_{24,35}$ und $d_{25,34}$.

E_{ij} und $\mathfrak{k}_{ij}$ sind Ecke und Gegenkante des Fünfflachs und werden durch die Diagonalebene δ_{ij}[3]) verbunden. — Zwei Diagonalen $\mathfrak{d}$ in derselben Ebene π treffen sich in einem Punkte T, dem wir als Zeiger den Zeiger der dritten

---

[1]) Bei Herrn Ciani dual: centri esarmonici.

[2]) Ciani: assi biarmonici.

[3]) Bei Ciani dual: centri tetrarmonici.

Diagonale in π geben. So schneiden sich $\delta_{24,35}$ und $\delta_{25,34}$ in $T_{23,45}$. — Die Gerade $\delta_{23,45}$ trifft $d_{24,35}$ und $d_{25,34}$, ist aber windschief zu $d_{23,45}$. Die Gerade $\delta_{24,35}$ liegt in $\tau_{24,35}$ und trifft $\delta_{23,45}$ in $T_{25,34}$. Dieser Punkt muss also auf der Schnittlinie $d_{25,34}$ von $\tau_{23,45}$ und $\tau_{24,35}$ liegen. Ebenso liegen $T_{23,45}$ und $T_{24,35}$ auf $d_{23,45}$ bezw. $d_{24,35}$. Wir haben nun ein Tetraeder erhalten mit den Kanten $d_{23,45}$, $d_{24,35}$, $d_{25,34}$, $\delta_{23,45}$, $\delta_{24,35}$, $\delta_{25,34}$, und zwar liegen gleichnamige einander gegenüber. Die Ecken und Seitenebenen sind P_1, $T_{23,45}$, $T_{24,35}$, $T_{25,34}$; π_1, $\tau_{23,45}$; $\tau_{24,35}$, $\tau_{25,34}$. Jeder Ebene τ liegt auch der gleichzeigrige Punkt T und dem Punkte P_1 liegt die Ebene π_1 gegenüber. — Zeichnen wir uns nun die Elemente einer Ebene τ, so zeigt sich sofort:

Jeder Punkt T liegt auf der gleichzeigrigen Gerade d und und zwar ist er harmonisch zugeordnet zu der Ecke auf der Diagonale in bezug auf ihre beiden Punkte D.

Wir gelangen durch Konstruktion der 3 Punkte T auf den 3 Geraden d durch eine Ecke P am anschaulichsten von der Ecke zur gleichnamigen Ebene π.

9. Jetzt betrachten wir die Diagonalebene δ_{45} des Fünfflachs (π). Durch ihren Punkt E_{45} gehen die 3 Geraden $\delta_{12,45}$, $\delta_{13,45}$, $\delta_{23,45}$, auf denen sich bezw. noch die Punkte E_{12}, E_{13}, E_{23} befinden, die wieder in gerader Linie, nämlich in f_{45}, liegen. Auf $\delta_{12,45}$ haben wir wegen der Eigenschaften des vollständigen Vierseits der Kanten in π_3 harmonisch zugeordnet zu den beiden Punkten E die Punkte $T_{14,25}$ und $T_{15,24}$, entsprechend auf $\delta_{13,45}$ die $T_{14,35}$ und $T_{15,34}$ und auf $\delta_{23,45}$ die $T_{24,35}$ und $T_{25,34}$. Bedenken wir, dass die Geraden $\delta_{15,24}$, $\delta_{15,34}$, $\delta_{15,23}$ in einer Ebene, nämlich δ_{15}, liegen und die 3 Diagonalen in δ_{45} bezw. in $T_{14,25}$, $T_{14,35}$, E_{23} schneiden, so ergibt sich sofort, dass diese 3 Punkte in gerader Linie $s_{5,14}$ liegen. Wir haben es hier mit der den verbundenen Ebenen τ (Nr. 4) dualen Erscheinung zu tun:

2 Punkte T, die sich nur in einer Ziffer unterscheiden, liegen in einer Gerade s durch diejenige Ecke E, deren

Zeiger aus den beiden verschiedenen Ziffern besteht. — Es gehen nun in δ_{45} von jedem Punkte E aus zwei Geraden $\int$ durch je 2 Punkte T.

10. Durch jede Ecke des Fünfecks gehen 6 Seitenebenen. Nehmen wir eine von diesen, so wird sie von zweien der 3 Ebenen τ durch unsre Ecke in einer Diagonale d, von der dritten aber in einer neuen Gerade geschnitten, der wir den Buchstaben u' geben. Durch jede Ecke P gehen demzufolge 6 Geraden u'; keine zwei von ihnen fallen zusammen. Keine der Geraden u' kann zwei Ecken P enthalten, und so ist klar, dass wir $5.6=30$ verschiedene Geraden u' bekommen. In jeder Ebene ε gibt es 3 solche Geraden, durch jede der 3 in ihr liegenden Ecken eine. So liegen in ε_{45} die Geraden $\varepsilon_{45}\ \tau_{23,45}$, $\varepsilon_{45}\ \tau_{13,45}$ und $\varepsilon_{45}\ \tau_{12,45}$, die bzw. durch P_1, P_2, P_3, gehen. Wir bekommen hierdurch die ersichtlich eindeutigen Bezeichnungen $u'_{1,23}$, $u'_{2,13}$, $u'_{3,12}$ für die 3 Geraden in ε_{45}. Entsprechend werden die anderen Geraden u' bezeichnet.

In jeder Ebene τ liegen 2 Geraden u', da τ 2 von den 6 Ebenen ε durch die zu τ gehörige Ecke nicht in Diagonalen d schneidet. So schneidet z. B. $\tau_{23,45}$ die Ebenen ε_{45} und ε_{23} in den Geraden $u'_{1,23}$ und $u'_{1,45}$. Die Spuren der 4 Geraden s, die in $\tau_{23,45}$ liegen, in einer dieser beiden Seitenebenen, etwa ε_{45}, müssen auch auf der Schnittgerade beider Ebenen, hier auf $u'_{1,23}$, liegen. Zwei dieser Spuren, nämlich die von $s_{4,23}$ und $s_{5,23}$, fallen aber in einen Punkt E zusammen, hier E_{23}.

Wir können also die Geraden u' auch als Verbindungslinien jeder Ecke P mit denjenigen 6 Punkten E definieren, die auf einer nicht durch die Ecke gehende Kante liegen. So wird P_1 mit E_{23} durch $u'_{1,23}$ verbunden.

Mit u'' bezeichnen wir die 30 Geraden, welche sich ergeben, wenn wir jeden Punkt D mit den 3 Punkten E in der mit D gleichzeigrigen Ebene ε verbinden. So können wir D_{45} verbinden mit E_{23}, E_{13}, E_{12}, und wir bezeichnen die Verbindungsgeraden mit $u''_{1,45}$, $u''_{2,45}$ $u''_{3,45}$.

Eine klare Vorstellung auch von den neu eingeführten Geraden verschaffen wir uns, wenn wir wieder die in einer Ebene ε, etwa ε_{45}, entstandene Figur betrachten. Wir bekommen in ε_{45} als Verbindungsgeraden der Dreiecksecken P_1, P_2, P_3 mit den auf den zugehörigen Gegenseiten liegenden Punkten E_{23}, E_{13}, E_{12} bzw. die 3 Geraden $u'_{1,23}$, $u'_{2,13}$, $u'_{3,12}$. Ferner haben wir als Verbindungslinien von D_{45} mit den 3 Punkten E bzw. die Geraden $u''_{1,45}$, $u''_{2,45}$, $u''_{3,45}$.

11. Auf jeder Diagonale d haben wir einen Punkt P und zwei Punkte D. Die beiden neuen Punkte, welche sich ergeben, wenn wir den harmonisch konjugierten Punkt zu jedem der beiden D in bezug auf den andern D und den P nehmen, bezeichnen wir mit S; und zwar geben wir demjenigen Punkte auf $d_{23,45}$, welcher harmonisch zugeordnet ist zu D_{23} in bezug auf P_1 und D_{45}, den Namen $S_{1,23}$. Durch $S_{1,23}$ geht, wie aus der in ε_{45} entstandenen Figur folgt, auch $s_{1,23}$, und zwar ist $S_{1,23}$ auf $s_{1,23}$ der vierte harmonische, zu E_{23} in bezug auf D_{12} und D_{13} zugeordnete Punkt. — Jetzt gehen wir in die Ebene ε_{23} und projizieren den harmonischen Punktwurf P_1, P_4, D_{14}, E_{14} aus P_5 auf $d_{23,45}$. Dadurch bekommen wir harmonisch zugeordnet zu dem Punktepaare P_1, D_{45} die Punkte D_{23} und $d_{23,45}$. $u'_{5,14}$. Der letzte Punkt ist also identisch mit $S_{1,23}$, das heisst, $u'_{5,14}$ geht durch $S_{1,23}$. In gleicher Weise zeigt sich, dass $u'_{4,15}$ durch $S_{1,23}$ geht. Also:

Es gehen durch den Punkt S_{kl} *die Geraden* $s_{i,kl}$, $d_{kl,mn}$, $u'_{m\,in}$ *und* $u'_{n,im}$, *wenn* i, k, l, m, n, *die Zahlen 1 bis 5 in beliebiger Reihenfolge bedeuten.*

12. Nun betrachten wir wieder eine Ebene τ, etwa $\tau_{23,45}$. In ihr liegen zwei Geraden d, nämlich $d_{24,35}$ und $d_{25,34}$. Wir suchen nun die Spurpunkte der 13 übrigen Geraden d. $d_{23,45}$ geht durch P_1; $d_{13,24}$, $d_{15,24}$ gehen durch D_{24}; $d_{13,25}$, $d_{14,25}$ durch D_{25}; $d_{12,34}$, $d_{15,34}$ durch D_{34}; $d_{12,35}$, $d_{14,35}$ durch D_{35}. Auf $s_{2,45}$ haben wir als Schnitt mit $u'_{1,23}$ den Punkt $S_{2,45}$. Ferner gehen durch die Punkte $S_{3,45}$, $S_{4,23}$, $S_{5,23}$ von $\tau_{23,45}$ die Geraden $d_{12,45}$, $d_{15,23}$, $d_{14,23}$. Da keiner der Spurpunkte dieser 13 Geraden d auf $\delta_{23,45}$ liegt, so ist

klar, dass alle diese 13 Geraden windschief sind zu $\delta_{23,45}$. Wir haben mithin den Satz:

Die Gerade $\delta_{ik,lm}$ *trifft ausser den Geraden* $d_{il,km}$ *und* $d_{im,kl}$ *keine Gerade d.*

13. Eine Diagonale d trifft 3 Geraden jedes Quintupels, in dem sie nicht vorkommt. Zu jedem Quintupel gibt es nun 10 Diagonalen, welche nicht in ihm vorkommen, und jede von diesen 10 Diagonalen trifft eins von den 10 möglichen Tripeln von windschiefen Diagonalen, die sich aus den Diagonalen des Quintupels bilden lassen. Solche Tripel gibt es 60, denn jedes Quintupel liefert 10. Wollen wir die Diagonale haben, die ein solches Tripel trifft, so tun wir folgendes: Wir nehmen die beiden Ecken, durch die keine der 3 Geraden d geht, und suchen diejenige Gerade des Tripels auf, in deren Zeiger die Zeiger der gefundenen Punkte als Paar vorkommen. Die Eckziffer dieser Diagonale ist auch Eckziffer der gesuchten. Diese Ziffer kommt in dem Namen jeder der beiden anderen Diagonalen als Ziffer des einen Paares vor. Die beiden Paare, in denen sie nicht vorkommt, stehen dann im Zeiger der gesuchten Diagonale. So bekommen wir zu dem Tripel

$$d_{14,23},\ d_{12,35},\ d_{15,24}$$

die gemeinsam treffende Diagonale $d_{15,23}$, und zwar trifft $d_{15,23}$ die $d_{14,23}$, $d_{12,35}$, $d_{15,24}$ bzw. in D_{23}, P_4, D_{15}. — Jedes unserer Tripel wird ferner noch von einer Kante, hier k_{35}, gemeinsam getroffen, denn k_{35} trifft jene 3 Geraden bzw. in P_5, D_{35}, P_3. Wir bekommen sie, indem wir wieder die beschriebene ausgezeichnete Diagonale aufsuchen und ihr anderes Ziffernpaar, in dem jene beiden ausgezeichneten Ziffern nicht vorkommen, zum Zeigerpaar einer Gerade k machen. — Endlich wird auch noch jedes der 60 Tripel von einer Geraden s getroffen, die wir auf folgende Weise erhalten: Wir nehmen die Eckziffer der ausgezeichneten Diagonale, hier 4, und machen sie zur ersten Ziffer, die Zeiger der ausgezeichneten Ecken, hier 1 und 2, zu Paarziffern einer Gerade s. Diese ist die gesuchte, hier also $s_{4,12}$, welche unsere 3 Geraden d bzw. in D_{14}, $S_{4,12}$ (Nr. 11),

D_{24} trifft. Jede Kante gehört zu 6, jeder Diagonalstrahl zu 2 Tripeln.

14. Die betrachteten 60 Tripel sind nicht die einzigen Tripel von windschiefen Diagonalen. Wir wissen, dass ein Dupel von Diagonalen d immer in einem und nur in einem Quintupel vorkommt (Nr. 2, Satz III). Sobald wir uns also 2 windschiefe Geraden d geben, sind 3 andere, die unter sich und zu den beiden gegebenen windschief sind, eindeutig bestimmt. Jedes Dupel kommt daher nur in 3 von unsern Tripeln vor. Nun können wir stets noch eine vierte Diagonale angeben, die zu beiden Geraden des Dupels windschief ist, diejenige nämlich, welche die 3 andern Geraden des Quintupels trifft. Das Dupel und diese vierte Diagonale bilden ein neues Tripel. Wir sprechen also von nun an von Tripeln erster Art und von Tripeln zweiter Art. Die Tripel zweiter Art besitzen noch interessante Eigenschaften. Da es $6 \cdot 10 = 60$ Dupel gibt, jedes Dupel aber durch eine bestimmte Diagonale zum Tripel ergänzt wird, so haben wir $\frac{60}{3} = 20$ Tripel zweiter Art. Jedes Dupel wird nun von 3 windschiefen Diagonalen getroffen, und das können nur die Diagonalen eines Tripels zweiter Art sein, da sie ja sonst nur eine gemeinsam treffende Diagonale haben dürften, und da es nur 80 Tripel gibt. Wir bemerken nun aber, dass die Diagonalen dieses Tripels auch diejenige Diagonale treffen, welche das Ausgangsdupel zum Tripel zweiter Art ergänzt. Also:

Jedes Tripel zweiter Art gehört mit einem andern Tripel zweiter Art zu zwei verbundenen Regelscharen.

Es sind z. B. verbunden die Tripel

$$d_{25,34},\quad d_{14,35},\quad d_{15,24} \text{ und}$$
$$d_{24,35},\quad d_{15,34},\quad d_{14,25}:$$

Nehmen wir etwa die Gerade $d_{24,35}$ des unteren Tripels, so trifft sie die Geraden des oberen Tripels bzw. in den Punkten P_1, D_{35}, D_{24} und in den Ebenen $\tau_{23,45}$, ε_{35}, ε_{24}.

Ist ein Dupel gegeben, so steht die Ziffer jeder der beiden Ecken, durch welche die Diagonalen gehen, im Namen

der andern Diagonale mit einer gewissen Ziffer zusammen. Diese letzteren Ziffern stellen wir nun gerade je mit der andern von den beiden ersten Ziffern zusammen; dann geben uns die beiden erhaltenen Paare den Zeiger der dritten Diagonale des Tripels zweiter Art. Um nun das verbundene Tripel zu bekommen, nehmen wir die Ziffern der Ecken der 3 Diagonalen des gegebenen Tripels und vertauschen in jedem Diagonalennamen die beiden darin enthaltenen von diesen 3 Ziffern. Dadurch bekommen wir 3 neue Geraden d, und das sind die des verbundenen Tripels.

15. Sehr anschaulich haben wir 2 verbundene Tripel von Diagonalen d, wenn wir 3 Kanten k in einer Ebenen ε betrachten. In ε_{45} liegen k_{12}, k_{13}, k_{23}, durch die ausser ε_{45} bzw. noch ε_{25}, ε_{14} und ε_{15} gehen. Die Geraden $d_{25,34}$, $d_{14,35}$ $d_{15,24}$ und $d_{24,35}$, $d_{15,34}$, $d_{14,25}$, die ja 2 verbundne Tripel bilden, sind dann immer Schnittgeraden von zweien jener 6 Ebenen ε.

Allgemein gilt über Tripel von windschiefen Diagonalen der Satz:

Die Tripel von windschiefen Diagonalen zerfallen in 2 Arten. Ein Tripel erster Art wird von je einer Diagonale, einer Kante, einem Diagonalstrahl, ein Tripel zweiter Art von 3 Diagonalen getroffen, die also wieder ein Tripel zweiter Art bilden.

Die zwölf Nullsysteme am räumlichen Fünfecke.

16. Wir geben nun den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 eine bestimmte Anordnung. Für uns wird es bei dieser Anordnung nur von Wichtigkeit sein, welche Elemente getrennt, welche benachbart stehen. Da es nun 12 Anordnungen gibt, bei denen verschiedene Elemente als benachbarte vorkommen, so haben wir es mit 12 verschiedenen Reihenfolgen zu tun.

Es gibt 10 Paare von Ziffern, und wir bezeichnen diejenigen Ziffern als einem der Paare in bezug auf eine be-

stimmte Anordnung zugeordnet, welche, wenn das Paar in bezug auf diese Anordnung benachbarte Ziffern enthält, zu beiden Ziffern des Paares nicht benachbart ist, und, wenn das Paar getrennt stehende Ziffern enthält, zu beiden Paarziffern benachbart ist. In gleicher Weise sprechen wir von Ecken, welche einem Eckenpaar zugeordnet sind.

Die Reihenfolge 1 2 3 4 5 werde zu grunde gelegt. Es gibt dann 2 Typen von Kanten. Typus I enthält die 5 Kanten, welche durch Verbindung benachbarter Punkte entstehen, Typus II enthält die 5 übrigen Kanten, auf denen sich also je 2 nicht benachtbarte Ecken befinden.

Ebenso zerfallen die Seitenebenen in 2 Typen. In jeder ε^{I} liegen 3 aufeinanderfolgende Ecken. Jede ε^{II} enthält 2 benachbarte Ecken und die zu diesem Paare zugeordnete Ecke. — Durch jede Ecke P gehen 3 Ebenen ε^{I} und 3 Ebenen ε^{II}. — Jede ε^{I} hat als Gegenkante eine k^{I}, jede ε^{II} hat als Gegenkante eine k^{II}. In jeder Ebene ε^{I} liegen 2 Kanten k^{I}, eine k^{II}, in jeder ε^{II} liegen 2 Kanten k^{II}, eine k^{I}.

Unter den Diagonalpunkten haben wir auch 2 Typen. In jedem D^{I} durchbohrt eine k^{I} eine ε^{I}, in jedem D^{II} durchbohrt eine k^{II} eine ε^{II}.

17. Bei den Diagonalen sind 3 Typen zu unterscheiden von je 5 Geraden d. Die d^{I} sind Schnittgeraden zweier Ebenen ε^{I}, die d^{II} sind Schnittgeraden zweier Ebenen ε^{II}, die d^{III} sind Schnittgeraden je einer ε^{I} und einer ε^{II}. Demzufolge liegen auf jeder d^{I} zwei Punkte D^{I}, auf jeder d^{II} zwei Punkte D^{II}, und auf jeder d^{III} liegt je ein Punkt D^{I} und D^{II}.

Durch jeden Punkt P geht von jedem Typus eine Diagonale.

In jeder ε^{I} liegen und durch jeden Punkt D^{I} gehen zwei Diagonalen d^{I}, eine d^{III}; in jeder ε^{II} liegen und durch jeden D^{II} gehen 2 Diagonalen d^{II}, eine d^{III}. — In jeder τ^{I} liegt eine d^{II}, eine d^{III}; in jeder τ^{II} liegt eine d^{I}, eine d^{III}; in jeder τ^{III} liegt eine d^{I}, eine d^{II}.

Wir werden oft mit Vorteil Namen für die Geraden d und die Ebenen τ anwenden, die bezug auf ihren Typus

haben. Wir bezeichnen also die 3 Diagonalen durch P_1 mit d_1^{I}, d_1^{II}, d_1^{III} und entsprechend die gegenüberliegenden Ebenen τ mit τ_1^{I}, τ_1^{II}, τ_1^{III}.

18. In ε_{45} liegen 3 Diagonalstrahlen, nämlich $s_{1,23}$, $s_{2,13}$, $s_{3,12}$. Der erste ist Verbindungsgerade eines D^{I} mit einem D^{II}, der zweite verbindet D^{I} mit D^{I}, der dritte wieder D^{I} mit D^{II}. Dem ersten und dritten werden wir den Typus III, dem zweiten den Typus I geben. Auch hier empfiehlt sich oft eine Bezeichnung, bei der die Typen berücksichtigt werden. Wir schreiben dann den Typus als obern Zeiger zu s, während wir untenhin die beiden Ziffern der Ebene ε setzen, in der die s liegt. Der Gerade $s_{1,23}$ wird also die neue Bezeichnung s_{45}^{III} zukommen, die allerdings ebenso der Gerade $s_{3,12}$ zugehört, sonst aber keiner. Der Name s_{45}^{I} dagegen gehört nur der Gerade $s_{2,13}$ an. — In einer Ebene ε^{I} gibt es also eine Gerade s^{I}, zwei s^{III}. In einer Ebene ε^{II} aber gibt es eine Gerade s^{II}, zwei Geraden s^{III}. s_{35}^{III} bezeichnet wieder zwei Geraden, während der Name s_{35}^{II} eindeutig ist. — Es gibt 5 Geraden s^{I}, 5 Geraden s^{II}, 20 Geraden s^{III}.

Bei den Geraden s^{III} sind noch 2 Untertypen vorhanden, die wir mit $\bar{s}^{III}$ und $\bar{\bar{s}}^{III}$ bezeichnen. Wir haben 10 Geraden $\bar{s}$, nämlich die 10 Geraden s^{III} in den Ebenen ε^{I}, und wir haben 10 Geraden $\bar{\bar{s}}^{III}$, die Geraden s^{III} in den ε^{II}. $\bar{s}_{ik}^{III}$ und $\bar{\bar{s}}_{ik}^{III}$ bedeuten aber immer noch je 2 Geraden.

Dieselben Typen, welche wir den Elementen k, ε, d gegeben haben, geben wir den entsprechenden Fünfflachelementen f, E, δ mit gleichen Zeigern.

19. Die Ecken P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und die Kanten k^{I} einer bestimmten Reihenfolge bilden ein räumliches Fünfseit. Die Ebenen ε^{I} sind seine Winkelebenen, die Geraden k^{II} sind seine Diagonalen. Die 5 Punkte und die zugehörigen 5 Winkelebenen bestimmen ein Nullsystem [1]). Also:

Jedem Punkte P entspricht diejenige Ebene ε^{I}, welche die Ecke mit den beiden benachbarten verbindet, das heisst,

---

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie. (Leipzig 1892.) No. 47.

deren Zeiger aus den zum Zeiger von P getrennt stehenden Ziffern bestehen.

So entspricht, wenn wir wieder die Anordnung 1 2 3 4 5 zu grunde legen, der Ecke P_1 die Ebene ε_{34}.

Jeder Ebene ε^I entspricht die Ecke, deren Zeiger dem Ziffernpaare von ε^I zugeordnet ist.

Wir betrachten eine k^I, etwa k_{12}, und die eine auf ihr liegenden Ecke, etwa P_1. Dieser Ecke entspricht ε_{34}, in der auch k_{12} liegt, das heisst, k_{12} ist Leitstrahl:

Jede k^I ist Leitstrahl des Nullsystems.

Was entspricht nun einer k^{II}? Wir wählen k_{13}. Sie verbindet P_1 mit P_3; in ihrer entsprechenden Gerade schneiden sich also ε_{34} und ε_{15}. Der k_{13} entspricht daher die Diagonale $d_{15,34} = d_2^I$, und wir haben den Satz:

Jeder Kante k^{II} entspricht die Diagonale d^I durch die Ecke, deren Zeiger dem Zeigerpaare der Kante zugeordnet ist.

Die Seitenebene vom Typus II ε_{13} enthält die Kante k_{45} und die Ecke P_2, ihr entspricht daher die Spur von k_{45} in ε_{45}, das heisst, der Punkt D_{45}, also:

Jeder ε^{II} entspricht ein Diagonalpunkt D^I. Sein Zeiger enthält die beiden Ziffern, welche der dem Paare von ε^{II} zugeordneten Ziffer nicht benachbart sind.

Umgekehrt:

Jedem Punkte D^I entspricht eine Seitenebene ε^{II}. Ihr Zeiger enthält die beiden Ziffern, welche der dem Paare von D^I zugeordneten Ziffer benachbart sind.

20. Vor den D_{II} betrachten wir die Diagonalen. Wir wissen schon:

Den Geraden d^I entsprechen die Kanten k^{II}. Zeiger der k^{II} sind die beiden Zeiger der der Ecke von d^I benachbarten Ecken.

Nehmen wir jetzt eine d^{III}, etwa $d_{15,24}$. Sie liegt in ε_{15} und geht durch deren Nullpunkt P_3, ist daher Leitstrahl:

Jede d^{III} ist Leitstrahl des Nullsystems.

Durch eine d^{II} gehen 2 Ebenen ε^{II}, z. B. durch $d_{14,35}$ die Ebenen ε_{14} und ε_{35}, denen die Punkte D_{23} und D_{12} entsprechen. Der $d_{14,35}$ entspricht daher die Grade $s_{2,13} = s_{45}^I$, und wir bekommen das Gesetz:

Jeder Diagonale vom Typus II entspricht ein Diagonalstrahl vom Typus I. Sein Zeiger hat als Ziffernpaar die der Eckziffer der Diagonale benachbarten Ziffern und als erste Ziffer die Eckziffer selbst.

21. Wir hatten schon gefunden, dass jedem Punkte D^{I} eine Ebene ε^{II} entspricht. — Jetzt nehmen wir einen Punkt D^{II}, etwa D_{13}. Durch diesen gehen die Geraden $d_{13,45} = d_2^{III}$ und k_{13}, also entspricht dem D_{13} die Ebene $d_2^{III}\, d_2^{I} = \tau_2^{II}$; mithin entspricht jedem Diagonalpunkte D^{II} die Ebene τ^{II} durch diejenige Ecke, deren Ziffer dem Ziffernpaare von d^{II} zugeordnet ist. Hierdurch haben wir zugleich gefunden, was den Ebenen τ^{II} entspricht:

Jeder Ebene τ^{II} entspricht derjenige Diagonalpunkt D^{I}, der als Zeigerpaar die Ziffern der beiden der Ecke von τ^{II} benachbarten Ecken enthält.

Die Ebene $\tau_{12,45}$, die vom Typus I ist, enthält die Geraden $d_{14,25}$, $d_{15,24}$. Die $\tau_{12,45}$ hat daher den Nullpunkt $s_{3,24}\, d_{15,24} = S_{3,24}$.

Einer Ebene τ^{I} entspricht der Punkt S, welcher als erste Ziffer die Eckziffer von τ^{I}, als Ziffernpaar die der Eckziffer benachbarten Ziffern besitzt.

Einer Ebene τ^{III}, etwa $\tau_{25,34}$, entspricht der Schnittpunkt der Polaren von $d_{23,45}$ und $d_{24,35}$, also der Punkt k_{25} $s_{1,25} = E_{25}$, das heisst:

Jeder Ebene τ^{III} entspricht derjenige Punkt E^{II}, dessen Zeiger der Eckziffer von τ^{III} benachbart sind.

22. Wir wissen schon folgendes:

Den 5 Geraden s^{I} entsprechen die 5 Diagonalen d^{II}. Bei einer Gerade s^{I} sind die Paarziffern nicht benachbart. Wir bilden nun aus jeder und der zweiten nicht benachbarten Ziffer ausser der andern Paarziffer das Paar und stellen beide Paare zum Namen einer Diagonale zusammen. Diese ist dann die entsprechende.

Nehmen wir noch eine Gerade $\bar{s}^{III}$, etwa $s_{1,24}$. Sie geht durch D_{12} und liegt in der Nullebene ε_{35} dieses Punktes; sie ist daher Leitstrahl des Nullsystems.

Die 10 Geraden $\bar{s}^{III}$ sind Leitstrahlen des Nullsystems.

23. Nun gehen wir zu den Geraden δ^{III}. $\delta_{15,24}$ liegt in $\tau_{15,24}$ (Nr. 2) und geht durch deren Nullpunkt E_{24}. Es ergibt sich der Satz:

Jede Gerade δ^{III} *ist Leitstrahl des Nullsystems.*

Während wir bei den d^{III} und δ^{III} eine Übereinstimmung zwischen Elementen des Fünfflachs und gleichnamigen Elementen des Fünfecks gefunden haben in bezug auf ihr Verhalten in einem der Nullsysteme, ergeben sich bei den andern Fünfflachelementen wesentliche Unterschiede. Wir sahen ja z. B. schon, dass den Punkten E^{II} nicht die Ebenen ε^{I} sondern die τ^{III} entsprechen, und wir überzeugen uns auch, dass die Geraden f^{I} keine Leitstrahlen sind.

Nun machen wir uns noch klar, dass die Geraden δ^{I} und δ^{II} keine Leitstrahlen sind, und dass ihnen keine andern Geraden δ entsprechen. $\delta_{12,45}$ liegt in $\tau_{12,45}$; in dieser Ebene befindet sich auch der Leitstrahl $d_{15,24}$, welcher von $\delta_{12,45}$ in $T_{15,24}$ getroffen wird. Wäre $\delta_{12,45}$ auch Leitstrahl, so müsste die $\tau_{12,45}$ den $T_{15,24}$ als Nullpunkt haben. Das ist unmöglich, weil die $\tau_{12,45}$ den Punkt $S_{3,24}$ als entsprechenden besitzt. $\delta_{12,45}$ ist daher kein Leitstrahl. Ihre Polare muss also den Leitstrahl $d_{15,24}$ in einem von $T_{15,24}$ verschiedenen Punkte treffen. Da aber $d_{15,24}$ nur noch von einer Gerade δ, nämlich $\delta_{14,25}$, getroffen wird, und da dies auch im Punkte $T_{15,24}$ geschieht, so kann der $\delta_{15,24}$ keine Gerade δ entsprechen. Ebenso steht es mit den andern Geraden δ^{I}.

Die Fünfflachdiagonale $\delta_{14,25}$ ist vom Typus II. Sie liegt in $\tau_{14,25}$ und müsste daher, wenn sie Leitstrahl wäre, durch D_{24} gehen, also unter anderm $d_{24,35}$ treffen. Sie ist also nicht Leitstrahl. Ihre Polare muss $d_{15,24}$ in einem von $T_{15,24}$ verschiedenen Punkte treffen, kann daher keine δ sein. Wir erhalten somit den Satz:

Keine Gerade δ^{I} *oder* δ^{II} *hat wieder eine Gerade* δ *zur Polare.*

Unter den besprochenen Linien sind im ganzen 25 Leitstrahlen vorhanden, nämlich:

(α) *die 5 Geraden* k^{I} ;
(β) *die 5 Geraden* d^{III},
(γ) *die 10 Geraden* s^{III},
(δ) *die 5 Geraden* b^{III}.

24. Wir sagten schon in Nr. 16, dass es für uns 12 verschiedene Anordnungen der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 gibt. Legen wir nun eine Anordnung zu grunde, so können wir zu jeder der andern Anordnungen durch aufeinanderfolgende Vertauschungen benachbarter Elemente — Transpositionen — übergehen. Es teilen sich dann die übrigen 11 Anordnungen in 3 Gruppen, nämlich

(1) eine Gruppe von 5 Anordnungen, zu denen wir durch 1 Transposition gelangen,

(2) eine Gruppe von 5 Anordnungen, zu denen wir durch 2 Transpositionen gelangen,

(3) eine Gruppe von 1 Anordnung, zu der wir durch 3 Transpositionen gelangen. — Es ist hierbei zu beachten, dass jede Anordnung und ihre Umkehrung identisch sind.

Bezeichnen wir die zugrunde liegende Anordnung mit A', so wollen wir die 6 Anordnungen der zweiten Gruppe auch mit A', die 6 andern mit A'' bezeichnen. Es zeigt sich nun, dass jede Anordnung A', wenn sie zu grunde gelegt wird, als zugehörige Gruppe (2) die übrigen 5 Anordnungen A' besitzt und dass auch zu jeder A'' die 5 übrigen die Gruppe (2) bilden. Wir bemerken weiter, dass wir die 6 Anordnungen A'' aus den 6 Anordnungen A' bilden können, in dem wir in bezug auf jede A' die die Gruppe (3) bildende Anordnung hinschreiben. Wir bekommen dadurch die Anordnungen zu Paaren geordnet und wollen zwei zu einem solchen Paar gehörige Anordnungen als „sich ergänzende Anordnungen“ bezeichnen. Von zwei sich ergänzenden Anordnungen bekommen wir bequem die eine aus der andern, indem wir das erste, dritte, fünfte, zweite, vierte Element hintereinanderschreiben.

25. Um nun die Anordnungen durch kurze und brauchbare Namen zu unterscheiden, geben wir dem Buchstaben A

auch untere Zeiger. Wir legen die Reihenfolge 1 2 3 4 5 und die sie ergänzende 1 3 5 2 4 zu grunde und bezeichnen jene mit A'_0, diese mit A''_0. Es gibt nun noch 5 Anordnungen A'. In jeder haben wir eine ausgezeichnete Ziffer, deren beide benachbarte Ziffern mit den ihr benachbarten in A_0' nicht übereinstimmen; diese ausgezeichnete Ziffer geben wir der betreffenden Anordnung A' als untern Zeiger. Ebenso verfahren wir mit den Anordnungen A'', indem wir von A_0'' ausgehen. — Wir bemerken, dass sich ergänzende Anordnungen durch diese Bezeichnungsweise denselben Zeiger bekommen und erhalten nun die folgende Zusammenstellung:

$A_0' = 1\ 2\ 3\ 4\ 5$, $A_0'' = 1\ 3\ 5\ 2\ 4$;
$A_1' = 1\ 3\ 2\ 5\ 4$, $A_1'' = 1\ 2\ 4\ 3\ 5$;
$A_2' = 1\ 3\ 4\ 2\ 5$, $A_2'' = 1\ 2\ 3\ 5\ 4$;
$A_3' = 1\ 2\ 4\ 5\ 3$, $A_3'' = 1\ 4\ 3\ 2\ 5$;
$A_4' = 1\ 4\ 2\ 3\ 5$, $A_4'' = 1\ 2\ 5\ 4\ 3$;
$A_5' = 1\ 2\ 5\ 3\ 4$, $A_5'' = 1\ 3\ 2\ 4\ 5$.

Diese Zusammenstellung zeigt uns sofort, durch wieviele Transpositionen zwei beliebige Anordnungen ineinander übergehen: Zwei in derselben Horizontalreihe stehende Anordnungen gehen durch 3, zwei in derselben Vertikalreihe stehende Anordnungen stehende durch zwei Transpositionen, zwei weder in derselben Horizontal- noch Vertikalreihe stehende Anordnungen durch eine Transposition in einander über.

26. „Ausgezeichnete Ziffer“ zweier Anordnungen mit verschiedenen Zeigern nennen wir, wenn die eine Anordnung als Zeiger O hat, die Zeigerziffer der andern Anordnung, wenn keine der beiden Anordnungen den Zeiger O hat, die dem Zeigerziffernpaare in bezug auf A'_0 zugeordnete Ziffer. Es zeigt sich sofort, dass zwei Paare von Anordnungen, die sich nur durch die Akzente ihrer Anordnungen unterscheiden, dieselbe ausgezeichnete Ziffer haben. So haben A_1' und A_2', A_1'' und A_2'', A_1' und A_2'', A_1'' und A_2' dieselbe ausgezeichnete Ziffer 4.

27. Unter „Transpositionspaar“ zweier Anordnungen mit verschiedenen Zeigern verstehen wir ein Ziffernpaar, das die ausgezeichnete Ziffer nicht und in beiden Anordnungen benachbarte Ziffern enthält. Zwei Anordnungen mit verschiedenen Akzenten haben 1 solches Paar, zwei mit gleichen Akzenten haben 2 Transpositionspaare. Durch Vertauschung der Ziffern dieser Paare in der einen Anordnung erhalten wir die andere. Wir haben z. B. in den Anordnungen A'_0 und A''_1 das Transpositionspaar 34, in A'_0 und A'_1 die Transpositionspaare 23 und 45. — Unter „Vertauschungspaar“ zweier Anordnungen mit verschiedenen Zeigern verstehen wir ein Paar, das die ausgezeichnete Ziffer nicht enthält, und dessen Ziffern in beiden Anordnungen entweder getrennt oder benachbart stehen. Jedes Transpositionspaar ist also auch Vertauschungspaar, aber nicht umgekehrt. Je zwei Anordnungen mit ungleichen Accenten besitzen 2 Vertauschungspaare; je zwei Anordnungen mit gleichen Accenten besitzen 4 Vertauschungspaare. Wenn wir in einer von zwei Anordnungen die Ziffern der Vertauschungspaare umstellen, welche nicht zugleich Transpositionspaare sind, so bekommen wir ebenfalls die andere Anordnung. In A'_1 und A''_3 haben wir die Vertauschungspaare 14 und 35. In A_2'' und A_4'' haben wir die Vertauschungspaare 12, 45, 15, 24.

28. *Bilden wir nun die Diagonalen* d^{III} *in bezug auf eine dieser Anordnungen, so bekommen wir gerade immer die 5 Diagonalen eines der in Nr. 3 besprochenen, auf Tafel I zusammengestellten Quintupel, und zwar erhalten wir bei je zwei sich ergänzenden Reihenfolgen dasselbe Quintupel.* Analog bekommen wir, wenn wir die Geraden $\mathfrak{d}^{III}$ in bezug auf irgend eine Reihenfolge hinschreiben, immer gerade ein Quintupel, und zu zwei sich ergänzenden Anordnungen gehört also das Quintupel derjenigen Diagonalen $\mathfrak{d}^{III}$, welche dieselben Zeiger besitzen wie die Geraden des zu denselben beiden Anordnungen gehörenden Quintupels von Geraden d^{III}.

Es liegt der Gedanke nahe, den Quintupeln je nach dem untern Zeiger der beiden Anordnungen, denen sie zugehören, die Namen Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 zu geben. Nun bemerken wir,

dass im Quintupel Q_0 nur Diagonalen d^{III} der Anordnung A'_0, in jedem andern 1 Diagonale d^{III} und je 2 Diagonalen d^{I} und d^{II} derselben Anordnung vorkommen. Die Ecke der Diagonale d^{III} ist für jedes der Quintupel ausser Q_0 charakteristisch, und wir sehen, dass ihre Ziffer mit dem untern Zeiger des betreffenden Quintupels übereinstimmt. In der Zusammenstellung auf Tafel I sind bei jedem Quintupel die Diagonalen d^{III} markiert.

29. Durch unsere 12 verschiedenen Anordnungen werden auch 12 verschiedene Nullsysteme bestimmt, die wir mit (A_0'), (A_0''), ... (A_5'), (A_5'') bezeichnen. Sie sind alle verschieden, weil z. B. den Kanten in keinen 2 von ihnen dieselben Geraden entsprechen.

Wir betrachten das Produkt zweier Nullsysteme mit verschiedenen Akzenten, z. B. $(A_0')(A_1'')$. Die 5 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 werden durch diese Kollineation bzw. transformiert in P_1, D_{12}, P_4, P_3, D_{15}. Sie werden durch das Produkt $(A_1'')(A_0')$ in genau dieselben Punkte übergeführt. Damit ist erwiesen, dass (A_0') und (A_1'') zwei vertauschbare involutorische Transformationen sind. Das Produkt ist daher wieder eine involutorische Transformation[1]). — Machen wir nun $u'_{1,34}$ und $u''_{1,34}$ zu Axen einer windschiefen Involution, so sehen wir, dass in dieser wirklich jene 5 Punktepaare Paare entsprechender Punkte sind. P_1 entspricht sich selbst, denn er liegt auf $u'_{1,34}$. Von P_2 aus geht die sich selbst entsprechende Gerade k_{12}, denn sie trifft $u'_{1,34}$ in P_1, und sie trifft $u''_{1,34}$, weil sie mit ihr in ε_{34} liegt. Der Schnittpunkt heisse U. Wenn wir uns das Dreieck $P_1\ P_2\ P_5$ zeichnen, so sehen wir sofort, dass durch E_{25} der harmonische Strahlenwurf k_{25}, $s_{1,25}$; $u''_{1,34}$, $u'_{1,25}$ geht, der in k_{12} den harmonischen Punktwurf P_2, D_{12}; U, P_1 einschneidet. Dem P_2 entspricht also wirklich in unserer windschiefen Involution der D_{12}. Dem P_3 entspricht P_4, weil P_3 und P_4 harmonisch zugeordnet sind in bezug auf D_{34} und E_{34}. P_5 und D_{15} entsprechen sich

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie. No. 175.

aus ähnlichen Gründen wie P_2 und D_{12}. Wir haben die Sätze:

Je zwei Nullsysteme (A'_i), (A''_k) haben ein kommutatives Produkt. Die Collineation (A'_i) (A''_k) ist eine windschiefe Involution, welche als Axen eine Gerade u' und eine u'' mit gleichen Zeigern besitzt. Erste Ziffer in diesen Zeigern ist die ausgezeichnete Ziffer von A'_i und A''_k, Ziffernpaar ist das Transpositionspaar dieser beiden Anordnungen. So hat die windschiefe Involution (A_1') (A_5'') die Axen $u'_{3,45}$ und $u''_{3,45}$.

Zwei Nullsysteme mit gleichen Akzenten sind nicht vertauschbar.

30. Wir kommen durch die 12 Anordnungen zu 12 verschiedenen Gewinden, jedes bestehend aus den Leitstrahlen des zu seiner Anordnung gehörenden Nullsystemes. Wir geben ihnen die Namen A_0', A_0'', ... A_5', A_5''. Je 2 von diesen Gewinden durchschneiden sich in einem Strahlennetze. Diese $\frac{12.11}{2} = 66$ Netze sollen nun untersucht werden. Es ist klar, dass diese Netze verschiedene Eigenschaften haben werden, je nachdem die Anordnungen, die zu den beiden linearen Komplexen gehören, durch 1 oder 2 oder 3 Transpositionen auseinander hervorgehen. Denn nach dem Verhalten der beiden Anordnungen zueinander wird es sich richten, welcher Art die Gesamtheit der uns bekannten gemeinsamen Leitstrahlen der beiden zugehörigen Nullsysteme ist. Wir bekommen also 3 Gruppen von Netzen, je eine Gruppe von 30 Netzen, in denen sich Gewinde schneiden, deren Anordnungen durch 1 bezw. 2 Transpositionen ineinander übergehen, und eine Gruppe von 6 Netzen, die zu zwei sich ergänzenden Anordnungen gehören.

Nehmen wir zunächst zwei Anordnungen, die in obiger Zusammenstellung nicht in gleicher Horizontal- oder Vertikalreihe stehen, etwa A_3' und A_4'', und suchen die uns bekannten, ihren Nullsystemen gemeinsamen Leitstrahlen, so finden wir 3 gemeinsame Kanten k^1, nämlich k_{12}, k_{13}, k_{45},

ferner je eine gemeinsame Diagonale d^{III} und $\mathfrak{d}^{III}$, nämlich $d_1^{III} = d_{23,45}$ und $\mathfrak{d}_1^{III} = \mathfrak{d}_{23,45}$, und endlich 4 gemeinsame Geraden s^{III}, nämlich $s_{4,23}$, $s_{4,15}$, $s_{5,14}$, $s_{5,23}$. Wir betrachten nur die beiden Geradenpaare k_{12}, k_{13} und k_{45}, $\mathfrak{d}_{23,45}$. k_{12} und k_{13} treffen sich im Punkte P_1, k_{45} und $\mathfrak{d}_{23,45}$ im Punkte E_{45}. k_{45} ist zu k_{12} und k_{13} windschief. $\mathfrak{d}_{23,45}$ trifft auch keine von ihnen, denn sie durchbohrt die Ebene ε_{45} in E_{23}, der weder auf k_{12} noch auf k_{13} liegt. Unsre 4 Geraden haben also nur 2 Treffgeraden. Die eine verbindet die Doppelpunkte der beiden Geradenpaare, die andre ist Schnittgerade ihrer Ebenen. Die erste ist also $u'_{1,45}$. Da sich auf der Schnittgerade der Ebenen ε_{45} und k_{45} $\mathfrak{d}_{23,45}$ die Spurpunkte von k_{45} und $\mathfrak{d}_{23,45}$ in ε_{45} befinden müssen, so ist die zweite Gerade $u''_{1,45}$. Diese Geraden sind die einzigen, welche unsre 4 Leitstrahlen treffen, d. h., sie sind die Leitgeraden des Netzes A_3' A_4''. In der Tat sind beide Geraden Polaren in bezug auf jedes der Nullsysteme (A_3') und (A_4'').

Wir können nun mit Hilfe der folgenden Sätze die Leitgeradenpaare aller Netze der Gruppe A'_i A''_k bestimmen:

Je 2 Gewinde mit ungleichen Zeigern und Akzenten schneiden sich in einem Strahlennetze, dessen Leitgeraden 2 Geraden u' und u'' mit gleichen Zeigern sind. Sie sind identisch mit den Axen der windschiefen Involution, welche sich als Produkt der beiden zu den Gewinden gehörigen Nullsysteme ergibt.

31. Zwei Gewinde Γ_1, Γ_2 erzeugen eine Kollineation mit Axen; je 2 Punkte, die in den zu Γ_1 und Γ_2 gehörenden Nullsystemen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ dieselbe Nullebene haben, und damit je 2 Ebenen, die in $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ denselben Nullpunkt haben, sind einander in dieser Verwandtschaft zugeordnet. Axen sind die Leitgeraden des Netzes Γ_1 Γ_2. Ein beliebiges Element X des Raumes hat, je nachdem man es als Element des einen oder des anderen der beiden kollinearen Räume auffasst, zwei verschiedene, entsprechende Elemente X' und X''. Jedes der beiden Produkte $\mathfrak{N}_1$ $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{N}_2$ $\mathfrak{N}_1$ transformiert X in eins der beiden Elemente X' und X''; wird

z. B. X durch $\mathfrak{N}_1\ \mathfrak{N}_2$ in X' übergeführt, so wird X durch $\mathfrak{N}_2\ \mathfrak{N}_1$ in X'' übergeführt, und wir haben den Satz:

Die beiden Transformationen, in welche sich die zu 2 Gewinden gehörende Kollineation mit Axen zerlegen lässt, sind identisch mit den beiden Transformationen, die sich als Produkte der zu den Gewinden gehörigen Nullsysteme ergeben.

Sind aber $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ vertauschbar, also $\mathfrak{N}_1\ \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2\ \mathfrak{N}_1$, so fallen X' und X'' zusammen, die Kollineation wird also zur windschiefen Involution. Diese ist dann identisch mit dem kommutativen Produkte der beiden Nullsysteme. Die beiden Gewinde sind daher in diesem Falle in Involution[1]).

Es erhellt zunächst, dass das Netz $A'_i\ A''_k$ als Leitgeraden die Axen der Kollineation $(A'_i)\ (A''_k)$ besitzt; das haben wir schon oben erkannt. Da ferner (A'_i) und (A''_k) vertauschbar sind, so sind die Gewinde A'_i und A''_k in Involution:

Je zwei Gewinde mit verschiedenen Zeigern und Akzenten stützen einander. Die durch sie hervorgerufene windschiefe Involuton ist das kommutative Produkt der zu den Gewinden gehörigen Nullsysteme.

32. Wir kommen zur zweiten Gruppe von Strahlennetzen. In jedem der 30 Netze dieser Gruppe durchschneiden sich zwei Gewinde mit gleichen Akzenten. Die zugehörigen Anordnungen gehen durch 2 Transpositionen ineinander über. Als Beispiel nehmen wir das Netz $A'_3\ A'_4$. Die Nullsysteme (A'_3) und (A'_4) haben beide die Leitstrahlen k_{24}, k_{35}, $d_{23,45}$, $s_{1,25}$, $s_{1,34}$. Die ersten 3 Geraden sind sichtlich windschief zueinander, und leicht lässt sich auch einsehen, dass jede der beiden Geraden s zu den ersten 3 Geraden windschief ist. Endlich sind die beiden Geraden s auch windschief zueinander, denn sie treffen $d_{25,34}$ in den verschiedenen Ebenen ε_{34} und ε_{25} und in den verschiedenen Punkten $S_{1,25}$ und $S_{1,34}$.

---

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie, No. 102, 175, 176.

Wir sind also durch unsre 30 Netze zu 30 Quintupeln windschiefer Geraden mit je 2 gemeinsamen Treffgeraden gelangt, jedes bestehend aus einer Diagonale d, 2 Kanten und 2 Diagonalstrahlen. Diese Quintupel sind sehr einfach gebildet. Wir schreiben 2 Paare von verschiedenen Ziffern hin und setzen aus ihnen den Zeiger einer Diagonale d zusammen. Jetzt bilden wir aus denselben 4 Ziffern 2 neue Paare und machen jedes zum Zeiger einer Gerade k. Schliesslich bilden wir die beiden letzten möglichen Paare und machen sie zu Paarziffern, die Eckziffer der Diagonale d zur ersten Ziffer zweier Geraden s. Dadurch ist zugleich klar geworden, dass jede Diagonale bei 2 solchen Quintupeln vorkommt, und dass jede Ecke bei 6 solchen Quintupeln ausgezeichnet ist. Wir erhalten also wirklich 30 verschiedene Quintupel. Wir geben ihnen die Bezeichnung V.

33. Die beiden Treffgeraden eines Quintupels V bezeichnen wir mit $\bar{v}$ und $\bar{\bar{v}}$. Um nun eindeutige Benennungen der Quintupel und ihrer Treffgeraden zu erhalten, sehen wir uns zunächst die Typen der Kanten in den zu einer Ecke, etwa P_1, gehörigen Quintupeln an. Wir bekommen da die 3 verschiedenen Paare I I, II II, I II. Jedes von diesen Paaren kommt bei 2 Quintupeln vor.

Wir geben infolgedessen den Quintupeln als erste obere Zeiger die Ziffern I, bezw. II, bzw. III. Die Bezeichnungen $V_1^{\,I}$, $V_1^{\,II}$, $V_1^{\,III}$ gehören dann jede noch zu 2 Quintupeln. Jetzt betrachten wir die Typen der Ziffernpaare in den Zeigern der Geraden s. Auch hier bekommen wir 3 Paare, nämlich I I, II II, I II, und geben den zugehörigen Quintupeln den zweiten obern Zeiger I, bezw. II, bezw. III. Wir erhalten so die 6 Namen $V_1^{\,II\,III}$, $V_1^{\,III\,II}$, $V_1^{\,I\,III}$, $V_1^{\,III\,I}$, $V_1^{\,I\,II}$, $V_1^{\,II\,I}$. Es sind also auch Quintupel verschieden, die sich nur durch die Stellung der obern Zeiger unterscheiden. Jetzt haben wir Namen für sämtliche 30 Quintupel. Die Treffgeraden von $V_1^{\,II\,III}$ bekommen die Bezeichnung $\bar{v}_1^{\,II\,III}$, $\bar{\bar{v}}_1^{\,II\,III}$.

34. Die dritte Gruppe enthält 6 Netze, diejenigen nämlich, welche wir durch Schnitt je zweier zu sich ergänzenden Anordnungen gehörenden Gewinde bekommen.

Die Geraden des Quintupels von Diagonalen d^{III} und die des Quintupels von Diagonalen $\mathfrak{d}^{III}$, welche zu zwei sich ergänzenden Anordnungen gehören (No. 24), sind gemeinsame Geraden der zu den beiden Anordnungen gehörigen Gewinde, das heisst, sie gehören dem Netze an, in welchem die Gewinde sich durchschneiden. Die 5 Geraden jedes Quintupels besitzen also 2 gemeinschaftliche Treffgeraden, und diese Paare von Treffgeraden sind die gesuchten Leitgeraden unsrer 6 Netze. Wir haben den Satz;

Jedes der 6 Quintupel von windschiefen Diagonalen d hat die Eigenschaft, dass seine 5 Geraden 2 gemeinsame Treffgeraden besitzen. Dieselben Treffgeraden besitzt auch das Quintupel der gleichnamigen Geraden $\mathfrak{d}$.

Wir bezeichnen diese Treffgeraden je nach dem zugehörigen Quintupel mit $\bar{q}_0, \bar{\bar{q}}_0, \bar{q}_1, \bar{\bar{q}}_1, \ldots\ldots q_5, \bar{\bar{q}}_5$, wobei die Querstriche zunächst beliebig sind.

Je 2 Geraden q mit gleichen Zeiger sind polar in den beiden zu ihrem Quintupel gehörenden Nullsystemen, da sie Leitgeraden des gemeinsamen Netzes von Leitstrahlen sind.

35. Die Geraden q sind 12 neue Geraden, denn keine der bisher besprochenen Linien hat die Eigenschaft, 5 windschiefe Diagonalen zu treffen. Zwei zum selben Quintupel gehörende Geraden q sind verschieden und windschief zueinander, weil 4 windschiefe Geraden stets 2 windschiefe Treffgeraden besitzen. Ferner wissen wir, dass jede der 10 Diagonalen, welche nicht in einem Quintupel vorkommen, 3 Geraden des Quintupels trifft; jede gehört also mit den beiden Treffgeraden des Quintupels zu einer Regelschar und ist daher, weil sie nicht mit ihnen zusammenfallen kann, windschief zu ihnen:

Jede Gerade q trifft 5 Diagonalen d und 5 Diagonalen $\mathfrak{d}$. *Zu den übrigen ist sie windschief.*

Daraus folgt nun wieder, dass keine zwei zu verschiedenen Quintupeln gehörigen Treffgeraden zusammenfallen

können; denn dann würde ja die Gerade q_i in die sie zusammenfallen, mehr als 5 Geraden d treffen. Die Treffgeraden sind also 12 neue, verschiedene Geraden.

36. Um noch einiges über unsre Geraden q sagen zu können, müssen wir eine Bemerkung über die Tripel erster Art (Nr. 13) machen. Wenn wir nämlich ein zu einer beliebigen Anordnung, etwa A_0', gehöriges Quintupel betrachten, so können wir die 10 in ihm vorkommenden Tripel erster Art in bezug auf jene Anordnung in 2 Typen einteilen. Gehen die 3 Diagonalen des Tripels durch 3 benachbarte Ecken, so geben wir ihm den Typus I, im andern Falle den Typus II. Es stellt sich nun heraus, dass jedes Tripel erster Art vom Typus I von je einer Gerade d^{I}, k^{II}, s^{II}, jedes Tripel erster Art vom Typus II von je einer Gerade d^{II}, k^{I}, s^{I} getroffen wird. Jede Gerade k, sowie jede s^{I} und s^{II} sind also für das Quintupel dreimal treffend. Hieraus folgt nun, dass eine Gerade q_0 keine Gerade k, s^{I} oder s^{II} treffen kann. Damit gilt zunächst, wenn wir verallgemeinern, dass keine Gerade q_i eine Kante trifft. Ebenso wie nun jede Gerade k aus einem Quintupel von Fünfecksdiagonalen 3 Geraden trifft, so trifft auch jede f aus einem Quintupel von Fünfflachdiagonalen 3 Geraden, und somit ist erwiesen, dass die 10 Geraden f ebenfalls zu den q windschief sind. — Wir zeigen jetzt, dass die 20 Geraden s^{III} auch zu q_0 windschief sein müssen. Von den Geraden s^{III} hat in bezug auf A_0' keine denselben Untertypus wie in bezug auf A_0'', keine also ist für die beiden Nullsysteme (A_0') und (A_0'') gemeinsamer Leitstrahl, und keine gehört daher dem Netze $A_0'\ A_0'' = [\bar{q}_0, \bar{\bar{q}}_0]$ an. Es wäre nun noch möglich, dass eine s^{III} die eine Gerade q_0 trifft. Begegnete aber eine s^{III} etwa $\bar{q}_0$, so ist ja s^{III} in bezug auf A_0'' eine $\bar{s}^{III}$, also Leitstrahl von (A_0''), und sie müsste daher auch die Polare $\bar{\bar{q}}_0$ von $\bar{q}_0$ treffen. Das ist ja nach obigem unmöglich. Ebenso müsste eine s^{III}, die einer der beiden Treffgeraden begegnete, auch der andern begegnen. Jede Gerade s^{III} ist mithin zu den beiden q_0 windschief. Alle Geraden s sind nun als wind-

schief zu den Geraden q_0 erkannt, und damit ist klar, dass keine Gerade s irgend eine von den Gerade q_i treffen kann. Wieder gilt die duale Eigenschaft für das Fünfflach (π); auch die 30 Geraden, die wir beim Fünfflach als Diagonalstrahlen bezeichnen müssen, sind zu den q_i windschief, also:

Jede Gerade q_i ist windschief zu 10 Diagonalen, allen 10 Kanten und allen 30 Diagonalstrahlen sowohl des Fünfecks (P) wie auch des Fünfflachs (π).

Es könnte ja nun sein, dass eine Gerade q andere Geraden q träfe. Wir beweisen vorläufig, dass eine Gerade q_i nicht beide Geraden q_k treffen kann. Begegnete nämlich etwa $\bar{q}_1$ der $\bar{q}_0$ und der $\bar{\bar{q}}_0$, so wäre sie Leitstrahl sowohl für (A_0') als auch für (A_0''). $\bar{q}_1$ trifft u. a. die Diagonale $d_{12,45}$, welcher in bezug auf (A_0') die Kante k_{24} entspricht. $\bar{q}_1$ müsste also k_{24} treffen. Das ist als unmöglich erkannt, also:

Eine q_i darf höchstens eine von den beiden Geraden q_k ($k \gtrless i$) treffen.

Die Doppelsechs der Geraden q.

37. Die Kollineationen, welche das räumliche Fünfeck (P) in sich selbst überführen, führen auch das Fünfflach (π) in sich selbst über[1]). Den Elementen P, k, ε, d; π, f, E, δ entsprechen also in diesen Verwandtschaften stets gleichartige Elemente. Damit ist zugleich klar, dass den Geraden q wiederum Geraden q entsprechen müssen.

Unsre Kollineationen zerfallen in die folgenden 7 Gruppen[2]):

[1]) Himpel, a. a. O. (s. S. 1) S. 5.

[2]) Küppers, „Kollineationen, durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformiert werden," Dissertation von Münster, Bonn 1890, S. 6. Himpel, a. a. O., S. 10.

(1) Die Identität,
(2) 10 involutorische Homologieen,
(3) 15 windschiefe Involutionen,
(4) 20 zyklische Kollineationen dritten Grades,
(5) 30 zyklische Kollineationen vierten Grades,
(6) 24 zyklische Kollineationen fünften Grades,
(7) 20 zyklische Kollineationen sechsten Grades.

Die Identität führt auch jede der Geraden q in sich selbst über.

Lassen wir nun den Punkten

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

der Reihe nach die Punkte

$$P_2,\ P_1,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

entsprechen, so wird dadurch eine involutorische Homologie (J_{12}) mit dem Zentrum E_{12} und der Homologieebene ε_{12} festgelegt[1]). Unsre Transformation vertauscht die Zeiger 1 und 2 miteinander. Keins der Quintupel kann durch eine solche Vertauschung in sich selbst übergeführt werden, denn in jedem kommen zwei Diagonalen vor, wo 1 im einen Zeigerpaare, 2 im andern steht, und jede von diesen Diagonalen wird durch Vertauschung der beiden Ziffern in eine durch dieselbe Ecke gehende, sie also treffende und daher nicht zum selben Quintupel gehörende verwandelt. Einer Gerade q_i entspricht mithin eine Gerade q_k, $k \gtrless i$. Bei der involutorischen Homologie trifft jede Gerade, welche nicht durch das Homologiezentrum geht und nicht in der Homologieebene liegt, ihre entsprechende in einer Ebene durch das Zentrum und in einem Punkte der Homologieebene. q_i muss also der entsprechenden q_k begegnen.

Q_i wird in ein beliebiges Quintupel Q_k immer durch 2 der 10 Verwandtschaften übergeführt. (Auf Tafel II sind für alle 10 involutorischen Homologieen die entsprechenden Quintupel zusammengestellt). Hieraus und aus der in Nr. 36

[1]) Küppers, a. a. O. S. 18. Himpel, a. a. O. S. 11. Auch Herr Ciani benützt diese Homologieen in Nr. 3ff. seiner Abhandlung (s. S. 1).

bewiesenen Tatsache, dass eine Gerade q_i nicht beide Geraden q_k treffen kann, folgt, dass jede der beiden Geraden q_i aus jedem der 5 andern Dupel von Geraden q_k die eine Gerade und nur diese trifft. Jener Satz in Nr. 36 lehrt uns auch, dass die beiden Geraden q_i nicht dieselbe Gerade q_k treffen. Wir bekommen den Satz:

Jede Gerade q trifft 5 andere Geraden q und zwar aus jedem der 5 übrigen Dupel eine. Zwei zu demselben Quintupel gehörende Geraden q treffen stets verschiedene Geraden q eines andern Quintupels.

Wir richten nun die Querstriche so ein, dass die Gerade q_0 die 5 Geraden $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4, \bar{q}_5$, die Gerade $\bar{\bar{q}}_0$ also die 5 Geraden $q_1, q_2, \bar{q}_3, q_4, q_5$, trifft. — Wir vermuten schon, dass unsre 12 Geraden eine sogenannte Schläflische Doppelsechs bilden. Um dies aber ganz klar zu erkennen, müssen wir noch den Nachweis führen, dass jede der übrigen Geraden q_i nur die q_k mit ungleichen Querstrichen und nicht die mit gleichen Querstrichen trifft.

38. Zu diesem Nachweise werden uns die 15 windschiefen Involutionen verhelfen, von denen wir eine erhalten wenn wir den Punkten

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4, \quad P_5 \text{ bezw. die Punkte}$$
$$P_1, \quad P_3, \quad P_2, \quad P_5, \quad P_4$$

zuordnen. Diese Verwandtschaft vertauscht P_2 mit P_3 und P_4 mit P_5, ist also identisch mit dem Produkte $(J_{23})\,(J_{45})$ oder $(J_{45})\,(J_{23})$. Wir nennen sie $(W_{23,45})$. Die Axen der windschiefen Involution sind $d_{23,45}$ und $\mathfrak{d}_{23,45}$[1]). Jede Gerade, welche sie beide trifft, entspricht sich selbst, also entsprechen sich selbst die 4 Geraden $q_3, \bar{q}_3, q_4, \bar{\bar{q}}_4$. In der Tat, durch unsre Transformation werden die beiden Quintupel Q_3 und Q_4 in sich selbst übergeführt (Tafel II). — Trifft aber eine Gerade keine der Axen, so muss sie bekanntlich zu ihrer entsprechenden windschief sein. Von den 8 Geraden q_0, q_1 q_2, q_5 ist also jede windschief zu ihrer entsprechenden.

[1]) Küppers, a. a. O., S. 21. Himpel, a. a. O., S. 12, 13.

Wollen wir nun z. B. beweisen, dass $\bar{q}_1$ die $\bar{\bar{q}}_2$, nicht die q_2 trifft, so betrachten wir wieder die Kollineation $(W_{23,45}) = (J_{45}).(J_{23})$. Da q_0 keine der Axen $d_{23,45}$ oder $b_{23,45}$ trifft, so entspricht der q_0 die zu ihr windschiefe Gerade $\bar{q}_1$ (Tafel II). Zu derselben Gerade müssen wir aber gelangen, wenn wir q_0 erst nach (J_{45}), dann nach (J_{23}) transformieren. Der q_0 entspricht nun aber in (J_{45}) die $\bar{\bar{q}}_2$, also muss der $\bar{\bar{q}}_2$ in (J_{23}) die q_1 und nicht die $\bar{q}_1$ entsprechen. Hieraus folgt nach Nr. 37, dass $\bar{\bar{q}}_2$ die q_1 treffen muss. Ganz ebenso können wir mit Hilfe geeignet gewählter Verwandtschaften (W) beweisen, dass $\bar{q}_1$ die Geraden $\bar{\bar{q}}_3$, $\bar{\bar{q}}_4$, $\bar{\bar{q}}_5$, trifft und weiterhin, dass auch jede andre Gerade q_i nur die Geraden q_k mit ungleichem Querstriche trifft.

Damit ist nun erkannt, dass unsre 12 Geraden q eine Schläflische Doppelsechs bilden, dass also in der Tabelle

$$\begin{matrix} \bar{q}_0, & \bar{q}_1, & \bar{q}_2, & \bar{q}_3, & \bar{q}_4, & \bar{q}_5; \\ \bar{\bar{q}}_0, & \bar{\bar{q}}_1, & \bar{\bar{q}}_2, & \bar{\bar{q}}_3, & \bar{\bar{q}}_4, & \bar{\bar{q}}_5 \end{matrix}$$

jede Gerade den nicht in gleicher Horizontal- oder Vertikalreihe stehenden begegnet, den andern aber nicht.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgen nun in Verbindung mit diesem letzten Ergebnisse die Sätze:

I. In jeder der 10 involutorischen Homologieen entsprechen sich 2 Geraden q mit verschiedenen Querstrichen.

II. In jeder der 15 windschiefen Involutionen sind die Treffgeraden zweier Quintupel sich selbst entsprechende Geraden. Jeder Gerade q eines andern Quintupels entspricht eine Gerade q mit gleichem Querstriche.

39. Da zwei einander entsprechende Strahlen sich immer in der Homologieebene treffen und ihre Verbindungsebenen durch das Homologiezentrum schicken, so bekommen wir je 6 von den Schnittpunkten $q_i\ q_k$ in einer Ebene ε und je 6 von den Verbindungsebenen $q_i\ q_k$ durch einen Punkt E gruppiert, also:

1. Die 30 Schnittpunkte $q_i\ q_k$ liegen zu je 6 in den 10 Ebenen ε, und die 30 Verbindungsebenen $q_i\ q_k$ gehen zu je 6 durch die 10 Punkte E.

Hierin besteht die Spezialität unsrer Doppelsechs; denn nicht jede beliebige Doppelsechs hat ihre Schnittpunkte und Verbindungsebenen so angeordnet. Nicht zu jeder Doppelsechs gehört also ein Fünfeck und ein Fünfflach.

$\bar{q}_0$ wird durch (J_{12}) in $\bar{\bar{q}}_4$ übergeführt (Tafel II). Beide Geraden sollen sich in einem Punkte von ε_{12} treffen. Sie dürfen nicht in dieser Ebene liegen, da sie dann u. a. die Kante k_{34} träfen. Da sie nun aber beide der Gerade $d_{12,35}$ der Ebene ε_{12} begegnen, so folgt, dass sie diese Gerade in einem und demselben Punkte treffen. Analog folgt, dass $\bar{q}_0$ und $\bar{\bar{q}}_4$ mit $d_{12,35}$ in derselben Ebene liegen, denn ihre Verbindungsebene geht durch E_{12}. Also besteht der Satz:

II. *Je zwei Geraden q, die einander treffen, gehen durch denselben Punkt mit derjenigen Fünfecksdiagonale, die den beiden zugehörigen Quintupeln gemeinsam ist, und liegen in derselben Ebene mit der gleichnamigen Fünfflachdiagonale.*

40. Bei Betrachtung der Gesamtheit der Geraden d und q bemerken wir, dass durch jeden der vorkommenden Schnittpunkte 3 Geraden gehen. Bei 10 Punkten, den D_{ik}, liegen obendrein noch die hindurchgehenden Geraden in derselben Ebene ε_{ik}. Z. B. gehen durch D_{12} und liegen in ε_{12} die Geraden $d_{12,34}$, $d_{12,35}$, $d_{12,45}$. Dual finden wir, dass in jeder der Konfiguration der Geraden $\mathfrak{d}$ und q angehörenden Verbindungsebene zweier Geraden sich auch noch eine dritte Gerade befindet. In den 10 Diagonalebenen δ_{ik} gehen die 3 Geraden obendrein noch durch denselben Punkt E_{ik}.

Jede Gerade d und auch jede $\mathfrak{d}$ trifft 4 Geraden q. Wäre also die Doppelsechs der Geraden q gegeben, so würden wir die Geraden d und $\mathfrak{d}$ als Treffgeraden der 15 Geradenquadrupel $\bar{q}_i$, $\bar{\bar{q}}_i$, $\bar{q}_k$, $\bar{\bar{q}}_k$ zu konstruieren haben, und zwar gilt folgendes:

Wir erhalten immer als Verbindungsgerade der Punkte $\bar{q}_i$ $\bar{q}_k$ *und* $\bar{\bar{q}}_i$ $\bar{q}_k$ *eine Gerade d, als Schnittgerade der Ebenen* $\bar{q}_i$ $\bar{\bar{q}}_k$ *und* $\bar{\bar{q}}_i$ $\bar{q}_k$ *die gleichnamige Gerade* $\mathfrak{d}$.

41. Eine von den 20 zyklischen Kollineationen dritten Grades erhalten wir, wenn wir den Punkten

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

der Reihe nach entsprechen lassen

$$P_1,\ P_2,\ P_4,\ P_5,\ P_3.$$

Kein Quintupel Q geht durch diese Transformation in sich selbst über. — Unsre Kollineation ordnet die Geraden des Raumes zu Tripeln an. Ein solches Tripel kann von zweierlei Art sein; entweder besteht es aus 3 untereinander windschiefen Geraden, oder seine Geraden treffen jede die beiden andern, d. h. sie bilden ein Dreiseit oder einen Dreistrahl[1]). Angenommen nun, die Gerade q_0, als Gerade des einen Raumes aufgefasst, träfe ihre entsprechende im zweiten Raume, so müsste dies $\overline{\overline{q}}_3$ sein. Transformieren wir diese aus dem ersten Raume in den zweiten, so muss sie wieder ihre entsprechende treffen, d. h., es müsste ihr $\bar{q}_5$ entsprechen. Diese wieder würde, als Gerade des ersten Raumes aufgefasst, in $\overline{\overline{q}}_0$ des zweiten Raumes transformiert werden. Sie soll ja aber die $\bar{q}_0$ als entsprechende im zweiten Raume haben. Es folgt also, dass die Annahme falsch ist. $\bar{q}_0$ darf ihre entsprechende nicht treffen. Das gleiche gilt für die übrigen Geraden q, also:

In jeder unsrer zyklischen Kollineationen dritten Grades entspricht einer Gerade q eine mit gleichem Querstriche versehene, von ihr verschiedene Gerade q. Die 2 Geraden q werden durch die Verwandschaft in 4 Gruppen von je 3 windschiefen eingeteilt, die jede einen Zyklus bilden.

42. Wenn wir den Punkten

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

bzw. zuordnen die Punkte

$$P_1,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_2,$$

so erhalten wir eine der zyklischen Kollineationen vierten Grades. Sie besitzt $d_{24,35}$ und $\mathfrak{d}_{24,35}$ als koinzidente Geraden. Auf $d_{24,35}$ entsprechen sich D_{24} und D_{35}, auf $\mathfrak{d}_{24,35}$ E_{24} und E_{35} involutorisch, d. h., unsre Kollineation ruft auf den beiden Koinzidenzgeraden involutorische Punktreihen hervor.

[1]) Küppers, a. a. O., S. 29.

Doppelpunkte der Involution auf $d_{24,35}$ sind P_1 und der zu ihm harmonisch konjugierte in bezug auf D_{24} und D_{35}, d. h. $T_{24,35}$. Die Involution auf $\mathfrak{d}_{24,35}$ ist elliptisch. Denn sie enthält die Punktepaare E_{24}, E_{35} und $T_{23,45}$, $T_{25,34}$, die harmoniseh, also elliptisch, zu einander liegen. $d_{24,35}$ und $\mathfrak{d}_{24,35}$ sind also die einzigen reellen Koinzidenzgeraden unsrer Kollineation[2]). — Es folgt nun, dass je zwei entsprechende Geraden des Netzes $[d_{24,35}, \mathfrak{d}_{24,35}]$ sich involutorisch entsprechen. Die beiden Quintupel, in denen $d_{24,35}$ vorkommt, Q_2 und Q_5, werden durch unsre Verwandschaft in sich selbst übergeführt. Die zugehörigen Geraden q könnten also die imaginären sich selbst entsprechenden Geraden sein. Da aber keine von den Geraden q durch P_1 geht, so ist dies unmöglich. Jeder von den Geraden q_2, q_5 entspricht die andere Gerade ihres Dupels. Die Geraden dieser Paare aber entsprechen sich involutorisch.

Nun nehmen wir an, dass der Gerade des einen Raumes $\bar{q}_0$ die Gerade $\bar{\bar{q}}_4$ im zweiten entspreche. Vervollständigen wir den Zyklus, so darf keine Gerade des Zyklus ihre entsprechende treffen, d. h., der Zyklus besteht aus den Geraden q_0, q_4, $\bar{q}_1$, $\bar{q}_3$. Wäre unsre Annahme richtig, so müssten $\bar{q}_2$ und $\bar{\bar{q}}_5$, die ja die sämmtlichen 4 Geraden des Zyklus treffen, entweder sich selbst entsprechen oder eine müsste der andern entsprechen. Beides ist nach obigem nicht der Fall. Die windschiefen Vierseite

$$\underline{\bar{q}_0}\ \underline{\bar{q}_4}\ \underline{\bar{q}_1}\ \underline{\bar{\bar{q}}_3} \quad \text{und}$$
$$q_0\ q_4\ q_1\ q_3$$

sind daher Zyklen unsrer Verwandschaft, und wir haben des Gesetz:

Durch jede unsrer zyklischen Kollineationen vierten Grades werden 2 Quintupel in sich selbst übergeführt, und in den zugehörigen Dupeln von Treffgeraden entspricht jeder Gerade die andre des Dupels involutorisch. Jeder der andern 8 Geraden entspricht eine sie treffende, so dass sie sich in 2, windschiefe Vierseite bildende, Zyklen teilen.

---

[2]) Küppers, a. a. O., S. 50, 51. Himpel, a. a. O., S. 15, 16.

Es seien noch die durch einige andre dieser Kollineationen hervorgerufnen Zyklen angeführt. — Die Kollineation, welche P_1, P_2, P_3, P_4 zyklisch vertauscht, führt zu den Zyklen

$$\overline{q_0}\ \overline{\overline{q_3}}\ \overline{q_5}\ \overline{\overline{q_2}} \quad \text{und}$$
$$\overline{\overline{q_0}}\ \overline{q_3}\ \overline{\overline{q_5}}\ \overline{q_2}.$$

Die Kollineation, welche P_2, P_4, P_3, P_5 zyklisch vertauscht, ruft die Zyklen

$$\overline{q_0}\ \overline{\overline{q_2}}\ \overline{q_1}\ \overline{\overline{q_5}} \quad \text{und}$$
$$\overline{\overline{q_0}}\ \overline{q_2}\ \overline{\overline{q_1}}\ \overline{q_5}$$

hervor.

43. Wir gehen zu den 24 zyklischen Kollineationen fünften Grades. Sie vertauschen alle 5 Punkte des Fünfecks zyklisch. Zu jeder unsrer 12 Anordnungen gehören 2 solche Verwandschaften, von denen jede die 5 Punkte in umgekehrter Reihenfolge wie die andre vertauscht. Nehmen wir die Anordnung A_0', so entspricht dem P_1 des ersten Raumes in der einen Kollineation der Punkt P_2, in der andern der Punkt P_5 im zweiten Raume. Beide Verwandtschaften haben das Quintupel Q_0 als sich selbst entsprechendes Quintupel. Ausserdem wird Q_0 auch von den beiden zu A_0'' gehörenden zyklischen Kollineationen in sich selbst übergeführt, und wir haben den Satz:

Jedes Quintupel Q_i entspricht sich selbst in denjenigen 4 zyklischen Kollineationen fünften Grades, welche die Elemente jeder der Anordnungen A'_i und A''_i nach einander zyklisch vertauschen.

Wir nehmen nun diejenige unserer Verwandtschaften, in welcher den Elementen

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

die Elemente

$$P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_1$$

entsprechen. Sie führt eins der Quintupel, nämlich Q_0, in sich selbst über. Es zeigt sich zunächst ganz ähnlich wie bei den zyklischen Kollineationen dritten Grades, dass jede der 10 Geraden q ausser den beiden q_0 eine sie nicht treffende zur entsprechenden hat. Diese 10 Graden zerfallen

also in 2 Zyklen von je 5 windschiefen Geraden, d. h., es entsprechen sich immer Geraden mit gleichen Querstrichen. Die Geraden des Cyklus $q_1, \overline{q}_2, \overline{\overline{q}}_3, \overline{\overline{\overline{q}}}_4, \overline{\overline{\overline{\overline{q}}}}_5$, werden alle von $\overline{q}_0$ getroffen. Diese Gerade entspricht sich daher selbst. Damit haben wir 2 koinzidente Geraden erhalten.

Durch jede der zyklischen Kollineationen fünften Grades wird ein Quintupel in sich selbst übergeführt. Seine Treffgeraden sind sich selbst entsprechende Geraden. Die 10 anderen Geraden aber zerfallen in 2 Zyklen von je 5 windschiefen Geraden.

44. Die Kollineation, in welcher den Punkten

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$$

die Punkte

$$P_2, P_1, P_4, P_5, P_3$$

entsprechen, ist ein Beispiel für die 20 Transformationen der letzten Art, die zyklisch vom sechsten Grade sind. Durch unsre Verwandtschaft wird keines der Quintupel in sich selbst übergeführt, jeder Gerade q_i entspricht eine Gerade q_k $(k \gtrless i)$.

Herr Küppers beweist nun[1]), dass bei jeder dieser 20 Kollineationen je zwei Geraden eines zyklischen Sextupels, von denen die eine aus der andern durch 3 Transformationen in einer Richtung hervorgeht, einander schneiden. Entspräche nun einer q_i eine $\overline{q}_k$, so würde sich auch, wenn wir noch zweimal weiter transformieren, wieder eine $\overline{q}$ ergeben, die ja q_i nicht treffen kann. Der $\overline{q}_i$ muss also eine $\overline{\overline{q}}_k$ entsprechen:

Die Doppelsechs der Geraden q teilt sich durch jede der zyklischen Kollineationen sechsten Grades in zwei windschiefe Sechsseite, die jedes einen Zyklus bilden[2]).

In bezug auf das Entsprechen der Geraden q in den in No. 37 angegebenen Gruppen von Verwandtschaften lassen sich nun folgende Sätze aufstellen:

---

[1]) A a. O. S. 42.

[2]) Die windschiefen Sechsseite einer Doppelsechs findet man näher behandelt bei R. Sturm, Math. Ann., Bd. 23, S. 301.

In den Kollineationen der Gruppen (1), (3), (4), (6), entspricht jeder Gerade q eine Gerade q mit demselben Querstriche.

In den Kollineationen der Gruppen (2), (5), (7) entspricht jeder Gerade q eine Gerade q mit anderm Querstriche.

45. Wir legen nun dadurch eine Korrelation fest, dass wir jedem Punkte P_i die Ebene π_i zuordnen. Dadurch bekommen wir, wie Herr Himpel nachweist[1]), eine Polarkorrelation mit imaginärer Grundfläche. Durch sie werden die Elemente des Fünfecks in die gleichbenannten des Fünfflachs übergeführt. Dass die Korrelation eine polare ist, das folgt auch leicht aus dem Vorhandensein von Polartetraedern. Denken wir z. B. an das in No. 8 besprochene Tetraeder; es liegen dort lauter Elemente einander gegenüber, die sich in unserer Korrelation entsprechen.

Da jeder Gerade d die gleichnamige $\overline{d}$ in dieser Verwandschaft polar ist, so entspricht einer Gerade q eine Gerade desselben Dupels von Geraden q, d. h., die q muss sich entweder selbst entsprechen, oder ihre Polare ist die andre Gerade des Dupels. Angenommen, $\overline{q_0}$ entspräche sich selbst, dann entspräche dem Punkte $\overline{q_0}\,\overline{q_1}$ wieder eine Ebene durch $\overline{q_0}$, und da in dieser die der q_1 polare Gerade liegen muss, so könnte das nicht $\overline{q_1}$ sondern müsste $\overline{\overline{q_1}}$ sein, das heisst, auch $\overline{q_1}$ müsste sich selbst entsprechen. So lässt sich zeigen, dass alle Gerade q dann sich selbst entsprächen, also auf der Grundfläche der Polarkorrelation lägen. Eine Doppelsechs kann aber nie auf eine F^2 gebracht werden. Also entspricht sich keine q selbst, und es sind daher die Geraden eines Dupels immer gegenseitig polar:

In der Polarkorrelation (P, π), welche die Elemente des Fünfecks (P) in die gleichzeigrigen des Fünfflachs (π) überführt, ist jeder Gerade q die zum selben Dupel gehörende Gerade q polar[2]).

[1]) A. a. O., S. 9.

[2]) Vergl. Schur, Math. Ann., Bd. 18, S. 1, §5. Dort wird bewiesen, dass in jeder Doppelsechs die Geraden eines Paares von Treffgeraden Polaren in bezug auf dieselbe F^2 sind.

46. Her Ciani erhält in Nr. 13 seiner Abhandlung folgendes Resultat:

Die 15 Diagonalebenen τ berühren eine und dieselbe Fläche zweiten Grades F^2.[1])

Dieser Satz stellt sich als falsch heraus. Denn nehmen wir einmal an, dass es eine F^2 gäbe, welche die sämtlichen 15 Diagonalebenen τ berührt, so würde ja diese F^2 durch jede der Kollineationen, welche das Fünfeck in sich selbst überführen, mithin auch durch alle 10 involutorischen Homologieen (J), in sich selbst übergehen. Soll aber eine F^2 durch eine involutorische Homologie in sich selbst transformiert werden, so ist es notwendig, dass Zentrum und Ebene der Homologie Pol und Polarebene in bezug auf die Fläche sind. Es wären also in bezug auf die F^2 die Ebenen ε_{ik} polar zu den Punkten E_{ik} (Nr. 37). Daraus wieder würde folgen, wie auch Herr Ciani richtig ausspricht, dass in bezug auf F^2 die k_{ij} und f_{ij}, ferner die P_i und π_i polar sind. Die F^2 wäre mithin die Grundfläche der Polarkorrelation (P,π). Es müssten also auch den Ebenen τ die gleichbenannten Punkte T entsprechen, und da die τ Berührungsebenen sind, so müssten die Pole T in ihnen liegen. In Nr. 8 aber wurde gezeigt, dass jeder Ebene τ der gleichbenannte Punkt T in einem Tetraeder gegenüberliegt. Die 15 Ebenen τ können also keine F^2 gemeinsam berühren. Das folgt auch schon daraus, dass die Polarkorrelation (P,π) eine imaginäre Grundfläche besitzt.

Der Fehler findet sich bei Herrn Ciani am Ende von Nr. 13 seiner Abhandlung. Er hat bewiesen, dass 12 Ebenen τ eine und dieselbe F^2 berühren, und zwar sind dies die 12 Ebenen, welche nicht durch E_{45} gehen (Nr. 8, Satz I). Nun sagt er weiter, dass wir immer einen Diagonalpunkt D angeben können, der in einer von den 3 Ebenen τ durch E_{45} liegt und nicht in den beiden andern. Das können wir aber in Wirklichkeit nicht; denn wir haben es ja mit den

---

[1]) Bei Ciani dual: J 15 punti diagonali di prima specie appartengono a una medesima quadrica. (S. Anm. S. 1).

3 Ebenen $\tau_{12,45}$, $\tau_{13,45}$, $\tau_{23,45}$ zu tun und sind nach Nr. 5, Satz I, nicht imstande, einen Punkt D anzugeben, der in einer der 3 Ebenen liegt und in keiner der andern.

Die 12 Spurpunkte der Geraden q in einer Ebene $\delta_{i\,k}$.

(Realität der Geraden q).

47. Wir vergegenwärtigen uns nochmals die in einer der Diagonalebenen des Fünfflachs (π), etwa in δ_{45}, entstehende Figur. In δ_{45} haben wir die 3 Geraden $\mathfrak{d}_{12,45}$, $\mathfrak{d}_{13,45}$, $\mathfrak{d}_{23,45}$, welche in E_{45} zusammenlaufen. Ihre Schnitte mit f_{45} sind E_{12}, E_{13}, E_{23}, und ferner liegen auf jeder von ihnen 2 Punkte T, welche die beiden zugehörigen Punkte E harmonisch trennen. So sind auf $\mathfrak{d}_{12,45}$ harmonisch zugeordnet zu E_{12} und E_{45} die Punkte $T_{14,25}$ und $T_{15,24}$. — Nun betrachten wir die Schnittpunkte von $\mathfrak{d}_{12,45}$ mit den sie treffenden Geraden q_1 und q_5. Die Spurpunkte von q_i, $\overline{q_i}$ in δ_{45} bezeichnen wir bezw. mit $\overline{q_i}^{\cdot}$, $\overline{\overline{q_i}}^{\cdot}$. Die Gerade $\mathfrak{d}_{12,45}$ entspricht sich selbst in der involutorischen Homologie (J_{12}). Sie geht durch das Zentrum E_{12} und wird von der Homologieebene ε_{12} in E_{45} geschnitten (Nr. 5 und 7). Der Gerade $\overline{q_1}$ entspricht $\overline{\overline{q_5}}$, der $\overline{\overline{q_1}}$ entspricht $\overline{q_5}$. Den Punkten $\overline{q_1}^{\cdot}$, $\overline{\overline{q_1}}^{\cdot}$ entsprechen also bezw. die Punkte $\overline{\overline{q_5}}^{\cdot}$, $\overline{q_5}^{\cdot}$, und es sind daher sowohl $\overline{q_1}^{\cdot}$ und $\overline{\overline{q_5}}^{\cdot}$ als auch $\overline{\overline{q_1}}^{\cdot}$ und $\overline{q_5}^{\cdot}$ harmonisch zugeordnet zu E_{12} und E_{45}:

Auf jeder Gerade $\mathfrak{d}$ sind harmonisch zugeordnet zu den Ecken E die Schnittpunkte mit je 2 Geraden q, welche ungleichen Zeiger und ungleichen Querstrich haben.

In der windschiefen Involution $(W_{14,25})$ (Nr. 41) ist $\mathfrak{d}_{12,45}$ eine sich selbst entsprechende Gerade. Sie trifft die Axen $d_{14,25}$ und $\mathfrak{d}_{14,25}$ bezw. in $T_{14,25}$ und $T_{15,24}$. Da nun der Gerade $\overline{q_1}$ die $\overline{q_5}$, der $\overline{\overline{q_1}}$ die $\overline{\overline{q_5}}$ entspricht, so sind die Punkte $\overline{q_1}^{\cdot}$ und $\overline{q_5}^{\cdot}$ und ebenso die Punkte $\overline{\overline{q_1}}^{\cdot}$ und $\overline{\overline{q_5}}^{\cdot}$ harmonisch zugeordnet zu $T_{14,25}$ und $T_{15,24}$:

Auf jeder Gerade $\mathfrak{d}$ *sind harmonisch zugeordnet zu den Punkten* T *die Schnittpunkte mit je* 2 *der Geraden* q, *welche ungleichen Zeiger aber gleichen Querstrich besitzen.*

Die 3 in einer Ebene liegenden Geraden $\overline{q}_1$, $\overline{\overline{q}}_2$, $\mathfrak{d}_{15,23}$ (Nr. 39, Satz II) treffen bezw. die Geraden $\mathfrak{d}_{12,45}$, $\mathfrak{d}_{13,45}$, $\mathfrak{d}_{23,45}$ unsrer Ebene δ_{45} in den Punkten q_1, q_2, E_{23}. Diese Punkte liegen also in gerader Linie. Durch ähnliche Betrachtungen bekommen wir noch weitere 23 Allineationen, die wir nebst der ersten im folgenden zusammenstellen:

$$E_{23}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_1 & \overline{\overline{q}}_2\\ \overline{\overline{q}}_1 & \overline{q}_2\end{matrix}\right., \qquad E_{23}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_0 & \overline{\overline{q}}_5\\ \overline{\overline{q}}_0 & \overline{q}_5\end{matrix}\right.;$$

$$E_{13}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_1 & \overline{\overline{q}}_4\\ \overline{\overline{q}}_1 & \overline{q}_4\end{matrix}\right., \qquad E_{13}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_3 & \overline{\overline{q}}_5\\ \overline{\overline{q}}_3 & \overline{q}_5\end{matrix}\right.;$$

$$E_{12}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_0 & \overline{\overline{q}}_4\\ \overline{\overline{q}}_0 & \overline{q}_4\end{matrix}\right., \qquad E_{12}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_2 & \overline{\overline{q}}_3\\ \overline{\overline{q}}_2 & \overline{q}_3\end{matrix}\right.;$$

$$T_{24,35}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_0 & \overline{\overline{q}}_1\\ \overline{\overline{q}}_0 & \overline{q}_1\end{matrix}\right., \qquad T_{25,34}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_2 & \overline{\overline{q}}_5\\ \overline{\overline{q}}_2 & \overline{q}_5\end{matrix}\right.;$$

$$T_{14,35}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_4 & \overline{\overline{q}}_5\\ \overline{\overline{q}}_4 & \overline{q}_5\end{matrix}\right., \qquad T_{15,34}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_1 & \overline{\overline{q}}_3\\ \overline{\overline{q}}_1 & \overline{q}_3\end{matrix}\right.;$$

$$T_{14,25}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_0 & \overline{\overline{q}}_3\\ \overline{\overline{q}}_0 & \overline{q}_3\end{matrix}\right., \qquad T_{15,24}\left\{\begin{matrix}\overline{q}_2 & \overline{\overline{q}}_4\\ \overline{\overline{q}}_2 & \overline{q}_4\end{matrix}\right..$$

48. Nehmen wir einen beliebigen Punkt X auf $\mathfrak{d}_{12,45}$ an, so bekommen wir einen Punkt U als Schnitt von E_{23} X mit $\mathfrak{d}_{13,45}$; ferner sei V der Schnittpunkt von $T_{14,25}$ U mit $\mathfrak{d}_{2345}$, W der Schnitt von E_{12} V mit $\mathfrak{d}_{13,45}$ und schliesslich Y der Schnitt von E_{23} W mit $\mathfrak{d}_{12,45}$. Zu jedem Punkte X bekommen wir auf diese Weise eindeutig einen Punkt Y zugeordnet. Lassen wir nun den Punkt X sich in beliebiger Richtung auf $\mathfrak{d}_{12,45}$ bewegen, etwa auf E_{45} zu, und nehmen

wir zunächst einmal an, die Punkte E_{12}, E_{13}, E_{23} folgen auf der Gerade $\mathfrak{f}_{45}$ von $\mathfrak{d}_{45}$ (Nr. 7,9) (von links nach rechts oder von rechts nach links) in der eben angegebenen Reihenfolge aufeinander, so bewegt sich Punkt U auch auf E_{45} zu. Punkt V rückt dann ebenfalls, gleichgültig, wo der Punkt $T_{14,25}$ von $\mathfrak{d}_{12,45}$ liegt, auf E_{45} zu. Ebenso nähern sich nun auch W und schliesslich Y dem E_{45}. X und Y bewegen sich daher in gleicher Richtung. — Haben die Punkte E_{12}, E_{13}, E_{23} nicht die vorhin angegebene Reihenfolge, so können wir die ganze Figur stets derart aus einem geeigneten Projektionseentrum in eine geeignete Bildebene ξ, projizieren, dass auf der Bildgerade von $\mathfrak{f}_{45}$ die Punkte E in der vorhinnigen Reihenfolge erscheinen. Da wir nun wissen, dass die dem X und Y in ξ entsprechenden Punkte sich in gleicher Richtung bewegen, so erkennen wir, dass X und Y es auch selbst tun müssen. Die Punkte X und Y bewegen sich also in jedem der möglichen Fälle in gleicher Richtung. Ist X' der dem Y in bezug auf $T_{14,25}$ und $T_{15,24}$ harmonisch zugeordnete Punkt, so folgt, dass dieser sich entgegengesetzt wie X bewegt. Die Punkte X und X' beschreiben also ungleichlaufende konjektive Punktreihen auf $\mathfrak{d}_{12,45}$. Diese beiden Punktreihen sind daher nicht identisch, es gibt nur 2 Punkte, M_x , N_x , welche sich selbst entsprechen, d. h. die sowohl zu einem Punkte von $\mathfrak{d}_{12,45}$ harmonisch liegen in bezug auf die beiden Punkte T als auch aus ihm durch jene Konstruktion hervorgehen. Weiter folgt, dass die Koinzidenzpunkte M_x und N_x reell sind. Suchen wir uns zu jedem dieser beiden Punkte den Punkt Y, so erhalten wir 2 weitere ausgezeichnete Punkte, M_y und N_y .

Wenn wir nun, statt von einem beliebigen Punkte X auszugehen, den $\bar{q}_5$ als Ausgangspunkt wählen und für ihn unsre Konstruktion ausführen, so ist infolge der in Nr. 47 aufgestellten Allineationen $U = \bar{q}_0$, $V = \bar{q}_3$, $W = \bar{q}_2$ und $Y = q_1$. Wir wissen, q_5 soll auch harmonisch zugeordnet sein zu q_1 in bezug auf $T_{14,25}$ und $T_{15,24}$. $\bar{q}_5$ ist damit als der eine der beiden Punkte M_x und N_x erkannt, etwa

als ersterer, und darf daher nicht beliebig auf $\mathfrak{d}_{12,45}$ angenommen werden. Der andere Punkt, N_x, ist dann identisch mit $\overline{\overline{q_5}}$. Die Punkte M_y und N_y, d. h. die zu M_x und N_x in bezug auf die beiden T harmonisch zugeordneten Punkte, sind nun $= \overline{q_1}$ bezw. $= \overline{\overline{q_1}}$. Jetzt können wir sagen:

Wenn die Elemente $\mathfrak{d}$, *E, T in* δ_{45} *bekannt sind, so sind durch sie die Schnittpunkse der Geraden d mit den Geraden* $\mathfrak{d}$ *bestimmt.*

49. Wie hat nun die Konstruktion zu geschehen? Wir nehmen 3 beliebige Punkte X_1, X_2, X_3 auf $\mathfrak{d}_{12,45}$ an und konstruieren die 3 Punkte Y_1, Y_2, Y_3, welche dem X mittelst der Reihenfolge von Schnitten am Anfang von Nr. 47 zugeordnet sind. Zu den Y konstruieren wir die in bezug auf die beiden T zugeordneten vierten harmonischen Punkte X'_1, X'_2, X'_3. Nun machen wir X_1 und X'_1, X_2 und X_2', X_3 und X_3' zu entsprechenden Punkten einer Konjektivität und konstruieren die Koinzidenzpunkte. Diese beiden Punkte haben die Eigenschaft, dass sie harmonisch liegen in bezug auf die beiden T zu demjenigen Punkte, aus dem sie durch obige Konstruktion hervorgehen. Diese Eigenschaft besitzen aber $\overline{q_5}$ und $\overline{\overline{q_5}}$. Haben wir nun diese erhalten, so sind $\overline{q_1}$ und $\overline{\overline{q_1}}$ sofort zu konstruieren und mit Hilfe jener Allineationen auch die andern Punkte q.

50. Es wird sich später die Frage erheben, ob vielleicht 3 Punkte q· auf den 3 Geraden $\mathfrak{d}$ in gerader Linie liegen können. Jede solche Allineation führt aber dazu, dass entweder 3 Punkte q· auf der Strecke der Diagonalen zwischen den beiden Punkten E und einer auf der Ergänzung, oder dass 1 Punkt q· auf der Strecke und 3 auf ihrer Ergänzugg liegen. Aus dem Vorangehenden folgt aber ganz deutlich, dass immer 2 Punkte q· auf der Strecke EE, 2 auf der Ergänzung liegen. Also:

Keine 3 Spurpunkte von Geraden q in einer Ebene δ *liegen in gerader Linie, wenn sie sich nicht auf derselben Gerade* $\mathfrak{d}$ *befinden.*

51. Die Punkte q' in δ_{45} sind sämtlich reell. Ebenso erweisen sich die Spurpunkte der Geraden q in den andern Ebenen δ als reell. Unsre 12 Geraden q sind daher selbst reell:

Die 12 Treffgeraden q der 6 Quintupel von Diagonalen sind sämtlich reell.

Die Fläche von Clebsch.

52. Durch die 15 Diagonalen δ unsres Fünfflachs (π) lässt sich eine Fläche dritter Ordnung legen, die Diagonalfläche von Clebsch[1]). Der synthetische Beweis dafür kann so geliefert werden:

Die Geraden $\delta_{12,34}$, $\delta_{13,24}$, $\delta_{14,23}$ in π_5 sind identisch mit 9 bestimmenden Punkten der Fläche, nämlich bzw. mit 4, 3, 2 Punkten. In π_4 befinden sich $\delta_{12,35}$, $\delta_{13,25}$, $\delta_{15,23}$. $\delta_{12,35}$ trifft $\delta_{12,34}$, und die Fläche muss also noch durch 3 andere Punkte auf ihr gelegt werden. $\delta_{13,25}$ trifft $\delta_{13,24}$ und $\delta_{12,35}$ und ist daher identisch mit 2 bestimmenden Punkten. $\delta_{15,23}$ trifft ausser den beiden andern Geraden in π_4 noch $\delta_{14,23}$, und es bedarf nur noch eines Punktes, um die Fläche durch sie gehen zu lassen. In π_3 haben wir zunächst $\delta_{12,45}$. Sie liegt mit den Geraden $\delta_{12,34}$ und $\delta_{12,35}$ in gleicher Ebene. Nur 2 Punkte der Fläche sind daher noch auf sie zu legen. Die Gerade $\delta_{14,25}$ trifft $\delta_{14,23}$, $\delta_{13,25}$ und $\delta_{12,45}$ in verschiedenen Punkten, und wir haben also noch einen ihrer Punkte zu Bestimmung zu benützen. $\delta_{15,24}$ trifft $\delta_{13,24}$, $\delta_{15,23}$ und die beiden Geraden in π_3 in 4 verschiedenen Punkten und gehört daher schon der Fläche an. Jetzt gehen wir zu π_2. Die Gerade $\delta_{13,45}$ trifft $\delta_{13,24}$ und $\delta_{13,25}$ in derselben Ebene δ_{13}, und ausserdem trifft sie $\delta_{12,45}$. Wir haben noch einen ihrer Punkte zu einem Flächenpunkte zu machen. Damit ist die Fläche durch 19 Punkte

---

[1]) Mathematische Ann. Bd. 4, S. 331.

vollständig bestimmt. $\mathfrak{d}_{14,35}$ trifft $\mathfrak{d}_{14,23}$ und $\mathfrak{d}_{14,25}$ in derselben Ebene; ausserdem trifft sie noch $\mathfrak{d}_{12,35}$ und $\mathfrak{d}_{13,45}$ in verschiedenen Punkten, gehört also der Fläche an. $\mathfrak{d}_{15,34}$ liegt in derselben Ebene mit $\mathfrak{d}_{15,23}$ und $\mathfrak{d}_{15,24}$, und trifft noch $\mathfrak{d}_{13,45}$ sowie $\mathfrak{d}_{14,35}$. Auch sie gehört der Fläche an. In π_1 ist $\mathfrak{d}_{23,45}$ Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{d}_{14,23}$ $\mathfrak{d}_{15,23}$ und $\mathfrak{d}_{12,45}$ $\mathfrak{d}_{13,45}$, $\mathfrak{d}_{24,35}$ ist Schnittlinie von $\mathfrak{d}_{13,24}$ $\mathfrak{d}_{15,24}$ und $\mathfrak{d}_{12,35}$ $\mathfrak{d}_{14,35}$, $\mathfrak{d}_{25,34}$ ist Schnittlinie von $\mathfrak{d}_{13,25}$ $\mathfrak{d}_{14,25}$ und $\mathfrak{d}_{12,34}$ $\mathfrak{d}_{15,34}$. Damit gehören sie alle 3 der Fläche an:

Die Diagonalen $\mathfrak{d}$ *liegen auf einer Fläche dritter Ordnung, F.*

53. Jede der Geraden q trifft 5 Geraden $\mathfrak{d}$, also:

Die 12 Geraden q liegen auch auf der Fläche, bilden daher mit den 15 Geraden $\mathfrak{d}$ *die Konfiguration aller 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung.*

Transformieren wir unsre Figur durch (P,π), so sehen wir, dass die Geraden d und q die 27 Geraden einer Fläche dritter Klasse Φ sind, die wir ebenfalls Diagonalfläche nennen, und wir haben den Satz:

Die 15 Diagonalen d eines räumlichen Fünfecks (P) *liegen auf einer Fläche dritter Klasse* Φ, *die 15 Diagonalen* $\mathfrak{d}$ *des zugehörigen Fünfflachs* (π) *auf einer Fläche dritter Ordnung F. Die übrigen 12 Geraden der Fläche* Φ *sind auch die weitern 12 Geraden der Fläche F. Diese Geraden bilden eine Schläflische Doppelsechs.* Mit der Figur des räumlichen Fünfecks sind also eine Diagonalfläche dritter Ordnung und eine Diagonalfläche dritter Klasse eng verbunden, die einander in einer Polarkorrelation, nämlich (P,π), entsprechen.

54. Die Geraden einer beliebigen Doppelsechs seien in der üblichen Weise bezeichnet mit

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6; \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6. \end{array}$$

Sollen die Geraden a_1 und b_1 einer Fläche dritter Ordnung angehören, so sind sie für diese identisch mit $2 \cdot 4$ bestimmenden Punkten. Da a_2 die b_1 trifft und b_2 die a_1

trifft, so gehören sie der Fläche an, sobald sie jede noch 3 Punkte mit ihr gemein haben. In gleicher Weise finden wir weiter, dass auf a_3 und b_3 jetzt noch je 2 bestimmende Punkte gelegt werden müssen, um sie ganz der Fläche angehörig zu machen. Auf a_4 haben wir dann nur noch einen bestimmenden Punkt zu bringen. Die Fläche ist jetzt durch 19 Punkte vollkommen bestimmt. Da nun b_5 und b_6 schon die 4 Schnittpunkte mit a_1, a_2, a_3, a_4 mit der Fläche gemein haben, so liegen sie ganz auf ihr. a_5 trifft b_1, b_2, b_3, b_6, und a_6 trifft b_1, b_2, b_3, b_5, beide gehören also der Fläche an. Endlich liegt auch b_4 auf ihr. Genau dual lässt sich zeigen, dass wir auch eine Fläche dritter Klasse durch unsre Doppelsechs legen können. Wir haben den Satz:

Eine beliebige Doppelsechs bestimmt eine Fläche dritter Klasse wie auch eine Fläche dritter Ordnung. Unser Satz sagt uns, dass, wenn die eine eine Diagonalfläche ist, die andere ebenfalls eine ist. Während den andern Elementen am Fünfecke allen neue Elementen am zugehörigen Fünfflache gegenüberstehen, gehört die Doppelsechs der Gerade q sowohl dem Fünfecke, als auch dem Fünfflache an, sie verbindet gewissermassen beide Figuren. Man kann das kurz so aussprechen:

Eine Fünfecksdoppelsechs ist stets zugleich eine Fünfflachdoppelsechs.

Wir haben in Nr. 40 gesehen, wie die Geraden d und $\mathfrak{d}$ zu konstruieren sind, wenn die Doppelsechs der Geraden q gegeben ist.

55. Unter den 45 Dreiseiten unsrer Fläche F zeichnen sich 10 aus, nämlich die in den Ebenen δ_{ik}. In ihnen gehen die 3 Geraden $\mathfrak{d}$ durch einen Punkt, denn alle haben E_{ik} gemein. Die Gerade $\mathfrak{d}_{12,45}$ z. B. hat in δ_{12} als zugehörigen Restkegelschnitt des Geradenpaar $\mathfrak{d}_{12,34}$ $\mathfrak{d}_{12,35}$. Da dieses seinen Doppelpunkt E_{12} auf $\mathfrak{d}_{12,45}$ hat, so ist E_{12} ein Doppelpunkt der durch die Fläche F auf $\mathfrak{d}_{12,45}$ hervorgerufenen Involution. Der andere ist E_{45}, also:

Auf jeder Gerade $\mathfrak{d}$ *sind die beiden Punkte E die Doppelpunkte der auf* $\mathfrak{d}$ *durch die Fläche F hervorgerufenen Involution.*

Betrachten wir die 3 Geraden eines Dreiseits der kubischen Fläche, so liegen diese Doppelpunkte viermal zu je dreien auf einer Gerade [1]). Während das so entstehende Viereck sonst ein allgemeines ist, wird es in unsern Ebenen δ_{ik} ein besonderes. Drei seiner Geraden fallen nämlich mit den drei Geraden der Fläche F zusammen und gehen daher durch einen Punkt. Die vierte Verbindungsgerade aber ist die Kante f_{ik}. Der Punkt E_{ik} gilt für 3 der Doppelpunkte.

Zu den Doppelpunkten E auf den Diagonalen $\mathfrak{d}$ müssen die 5 Schnittpunktepaare mit den 5 an $\mathfrak{d}$ hängenden Geradenpaaren harmonisch liegen. Von 2 Paaren wissen wir es schon, von denen, die durch die Punkte E gehen. Nehmen wir z. B. $\mathfrak{d}_{12,45}$, so ist das dritte Paar $\mathfrak{d}_{14,25}$, $\mathfrak{d}_{15,24}$. Auch dessen Schnittpunkte mit $\mathfrak{d}_{12,45}$, die Punkte $T_{15,24}$, bzw. $T_{14,25}$ haben wir schon als harmonisch zugeordnet in bezug auf die beiden Punkte E erkannt. Ebenso wissen wir (Nr. 46) von den Schnittpunktepaaren der $\mathfrak{d}_{12,45}$ mit $\overline{q_1}$, $\overline{q_5}$ und $\overline{q_1}$, $\overline{q_5}$, dass sie der Involution angehören, welche die beiden E als Doppelpunkte hat.

56. Aus dem Satze in Nr. 51 über die Realität der Geraden q folgt, dass unsre Fläche nur reelle Geraden besitzt.

Wir haben also den Satz:

Jede Diagonalfläche mit reellem Fünfeck bzw. Fünfflach besitzt nur reelle Geraden. [2])

---

[1] R. Sturm, Flächen 3. Ordnung, Leipzig 1867, Nr. 29.

[2]) Analytischer Beweis bei Eckardt, Math Ann., Bd. 10, S. 265.

Die Gruppe der 12 Diagonalflächen, in welche die Fläche Φ durch die 12 Nullsysteme (A'_i) und (A''_i) transformiert wird.

57. Wir können unsre Diagonalen d nach den 12 Nullsystemen (A) transformieren und erhalten dadurch 12 neue Konfigurationen von je 15 Geraden. Je solche 15 Geraden sind dann die Diagonalen eines Fünfflachs. Als zugehörige Diagonalflächen erhalten wir die 12 Flächen dritter Ordnung, welche unsrer Fläche Φ dritter Klasse in den 12 Nullsystemen entsprechen. Je nach dem Nullsysteme, durch welches wir eine der neuen Flächen bekommen haben, bezeichnen wir sie mit F'_0, F''_0, ..., F'_5, F''_5.

58. Jedes der Nullsysteme führt eins der 6 Quintupel auf Φ, die wir kurz als „Grundquintupel" bezeichnen wollen, in sich selbst über (Nr. 28). Wir sehen also, dass zu jeder neuen Konfigurationen 5 windschiefe Diagonalen des Fünfecks gehören und ausserdem noch 10 andre Geraden, diejenigen nämlich, welche den jeweiligen d^I und d^{II} unter den Ausgangsdiagonalen entsprechen. Die 15 Diagonalen eines der durch die Transformationen des Fünfecks (P) erhaltnen Fünfflache bestehen daher 1) aus den 5 Diagonalen d^{III}, 2) aus den 5 Kanten k^{II}, 3) aus den 5 Diagonalstrahlen s^I von (P). Für die 6 neuen Quintupel bekommen wir ein einfaches Bildungsgesetz. Da in jedem Grundquintupel, welches nicht aus lauter d^{III} in bezug auf eine Anordnung besteht, 2 Geraden d^I, 2 Geraden d^{II} und eine Gerade d^{III} in bezug auf diese Anordnung vorkommen (Nr. 28), so enthalten 5 der neuen Quintupel je 2 Geraden k^{II}, 2 Geraden s^I und eine Gerade d^{III}. Das sechste Quintupel aber besteht aus den 6 Leitstrahlen d^{III}. Letzteres ist sofort bekannt. Jede seiner Geraden kommt noch in einem der 5 übrigen Quintupel vor. Um das Quintupel, zu dem eine bestimmte Gerade d^{III} gehört, zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein:

Wir suchen die Ecke der Diagonale d. Dann nehmen wir die eine Nachbarziffer der Eckziffer und stellen sie mit

der zu ihr und der Eckziffer zugeordneten Ziffer (Nr. 16) zusammen. Dadurch bekommen wir den Zeiger einer der beiden Geraden k^{II}. Die zweite Kante erhalten wir durch die andre Nachbarziffer. Ferner nehmen wir die eine der beiden zu unsrer Eckziffer nicht benachbarten Ziffern und machen sie und die Eckziffer zum Zeigerpaare einer Gerade s, der wir dann noch als erste Ziffer die zu diesem Paare zugeordnete Ziffer geben. Hierdurch bekommen wir die eine Gerade s^{I}; durch die andere nicht benachbarte Ziffer erhalten wir die zweite. Wir sind nun imstande, die sämtlichen 6 zu irgend einer der 12 Flächen gehörenden Quintupel aufzuschreibeu. Auf Tafel III sind die zu jeder der 12 Flächen gehörenden Quintupel zusammengestellt.

59. Wir können, wenn wir die Quintupel auf einer Fläche, etwa F'_0, haben, die Geraden der 11 übrigen Flächen auf recht einfache Weise mit Hilfe der Substitutionen bilden, die wir durch den Übergang von der Anordnung A'_0 zu jeder der 11 übrigen Anordnungen erhalten. Dabei lassen sich je 2 Anordnungen noch in besonders geschickter Weise untereinanderschreiben, so dass die Substitutionen zu einfachen Zyklen werden.

Haben wir z. B. 2 Flächen mit gleichem Akzente, etwa F_0' und F_2', so liefert uns die Substitution

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 2),$$

augewandt auf die Geraden der Quintupel von F_0', die Quintupel von F_2'.

Haben wir 2 Flächen mit ungleichen Zeigern und Akzenten, etwa F_0' und F_3'', so leistet uns die Substitution

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 5)$$

dieselben Dienste.

Haben wir schliesslich 2 Flächen mit gleichen Zeigern und ungleichen Akzenten, also A_0' und A_0'', so bekommen wir die Quintupel von A_0'' aus denen von A_0' durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 3\ 5\ 4).$$

60. Die Quintupel, welche wir durch das Nullsystem (A_0') erhalten, bezeichnen wir mit Q_0'. In jedem dieser Quintupel kommt eine für das Quintupel charakteristische Gerade d^{III} vor. Wir bezeichnen daher etwa mit $Q'_{0,1}$ dasjenige Quintupel, in welchem die Diagonale $d_1{}^{III}$ in bezug auf die Anordnung A_0' vorkommt. Es stellt sich nun heraus, dass $Q'_{0,i}$ durch (A_0') aus Q_i hervorgeht. Denn in Q_i befindet sich als einzige d^{III} die $d_i{}^{III}$ für A_0'.

Wenn wir die Grundquintupel nach einem der Nullsysteme transformieren, so werden die Treffgeraden desjenigen, das in sich selbst übergeht, polar zu einander (No 34.) Die Treffgeraden der andern Quintupel haben als entsprechende die Treffgeraden der 5 neuen Quintupel. Ist (A_0') das Nullsystem, nach dem transformiert wird, so bekommen wir für die 10 neuen Geraden die Namen $\overline{q'_{0,1}}$, $\overline{\overline{q'_{0,1}}}$, ... , $\overline{q'_{0,5}}$, $\overline{\overline{q'_{0,5}}}$, wo wieder durch die Querstriche solche Geraden unterschieden werden, welche dasselbe Quintupel treffen. Es entsprechen jetzt den Geraden q_1 in (A_0') die Geraden $q_{0,1}'$, uud wir wollen die Bezeichnung so einrichten, dass immer Geraden mit ungleichen Querstrichen polar sind. Da nun die Gerade $\overline{q_1}$ die Geraden $\overline{q_0}$, $\overline{q_2}$, $\overline{\overline{q_3}}$, $\overline{q_4}$, $\overline{\overline{q_5}}$ trifft, so begegnet entsprechend die Gerade $\overline{q'_{0,1}}$ den Geraden $\overline{q_0}$, $\overline{q'_{0,2}}$, $\overline{\overline{q'_{0,3}}}$, $\overline{q'_{0,4}}$, $\overline{\overline{q'_{0,5}}}$. Wir erhalten so auf F_0' die Schläflische Doppelsechs.

$$\begin{matrix} \overline{q_0}, & \overline{q'_{0,1}}, & \overline{q'_{0,1}}, & \overline{\overline{q'_{0,3}}}, & \overline{q'_{0,4}}, & \overline{\overline{q'_{0,5}}}, \\ \overline{\overline{q_0}} & \overline{q'_{0,1}}, & \overline{\overline{q'_{0,2}}}, & \overline{q'_{0,3}}, & \overline{\overline{q'_{0,4}}}, & \overline{q'_{0,5}}. \end{matrix}$$

61. Mit q_i bezeichnen wir von jetzt an eine der Geraden q, welche zum Fünfeck (P) gehören, mit $q_{i,k}$ ganz allgemein eine der 120 neuen Geraden q. Unter q'_i verstehen wir stets eine neue Gerade q auf F'_i, wobei wir also nur den ersten Zeiger erwähnen. Wenn wir sagen: „Die Geraden q_0, die Geraden $q'_{0,1}$,“ so meinen wir damit immer beide Ge-

raden des Dupels. — Vergleichen wir 2 Geraden q miteinander, so deuten uns in den Bezeichnungen $q_{i,k}$, $q_{l,m}$ die u des zweiten Namens an, dass sein Akzent und sein Querstrich ungleich ist dem Akzente, bezw. dem Querstriche des ersten Namens. $q_{i,k}$ und $q_{l,m}$ sind 2 Geraden, die gleichen Akzent und gleichen Querstrich haben. Damit ist wohl auch klar, wie $q_{i,k}$ und $q_{l,m}$ sowie $q_{i,k}$ und $q_{l,m}$ beschaffen sind. Diese Bezeichnungsweise hat, wie gesagt, nur bei Vergleichung zweier Geraden q statt, wie sie z. B. in den folgenden Regeln über polare Geraden q vorkommen wird. Wir stellen also jetzt die Gesetze auf, nach welchen zu den Geraden q_i in unsern Nullsystemen die entsprechenden Geraden gefunden werden. In den folgenden Sätzen soll i eine der Ziffern 0 bis 5 sein, j, k, l, m, n sollen je eine der Ziffern 1 bis 5 bedeuten.

I. Der Gerade q_i entspricht in den Nullsystemen (A'_i) *und* (A''_i) *die Gerade* q_i (*No. 34*). So entspricht der $\bar{q}_1$ in (A'_1) die $\bar{\bar{q}}_1$.

II. Der Gerade q_i *entspricht in* (A_k) *die Gerade* $q_{k,m}$, *wenn* m *die ausgezeichnete Ziffer der Anordnungen* A_i *und* A_k *ist* (*Nr. 26*). So entspricht der $\bar{q}_3$ in (A''_5) die $\bar{q}''_{5,4}$.

62. Die Fläche F wird durch unsre 12 Nullsysteme in 12 Flächen dritter Klasse Φ_0', Φ_0'', ... Φ_5', Φ_5'' übergeführt. Da F und Φ die Geraden q_i gemein haben, so haben je zwei gleichbezeichnete neue Flächen Φ und F die zugehörigen 12 Treffgeraden gemein. Die den Quintupeln der Geraden d entsprechenden Quintupel haben daher als Treffgeraden unsre Geraden $q_{i,k}$. Nun wissen wir, dass die Geraden $\mathfrak{d}^{III}$ irgend einer Anordnung Leitstrahlen des zugehörigen Nullsystemes sind. Daraus folgt sofort, dass ein Geradendupel $q_{i,k}$ nicht nur von der Gerade d_k III in bezug auf A_i, sondern auch von der gleich benannten Gerade $\mathfrak{d}$ getroffen wird. Während aber jene mit $q_{i,k}$ und q_i in einer Ebene liegt, geht diese mit ihnen durch einen Punkt (No. 39, Satz II):

Jede Gerade $q_{i,k}$ *trifft mit* $\overset{u}{q_i}$ *auf der Gerade* $\mathfrak{d}_k$ ^{III} *der Anordnung* A_i *zusammen.*

63. Die Gerade $q'_{0,1}$, trifft die Geraden $d_{25,34}$, k_{24}, k_{35}, $s_{2,13}$, $s_{5,14}$ und weiter keine Gerade d, k oder s der Fläche F_0'. Sie trifft also u. a. nicht $d_{13,45}$, $d_{15,24}$, $d_{12,35}$, $d_{14,23}$. $\overline{q}_1$ ist windschief zu den Geraden k und s (Nr. 36). Transformieren wir $\overline{q}_i$ und die Geraden k^{II} und s^I der Anordnung A'_0 durch (A'_0), so erhalten wir: $\overline{q}'_{0,1}$ ist windschief zu allen Geraden d, welche nicht auf F_0' liegen. Unsre Gerade trifft daher nur eine Diagonale d, nämlich $d_{25,34}$, das ist die d^{III} in bezug auf A'_0 und A''_1. — Entsprechendes lässt sich für die Geraden $\mathfrak{d}$ beweisen. Auf Φ'_0 liegen, da keiner Gerade $\mathfrak{d}^I$ oder $\mathfrak{d}^{II}$ der Anordnung A'_0 wieder eine Gerade $\mathfrak{d}$ entspricht (Nr. 23), nur die 5 Geraden $\mathfrak{d}^{III}$, nämlich $\mathfrak{d}_{25,34}$, $\mathfrak{d}_{13,45}$, $\mathfrak{d}_{15,24}$, $\mathfrak{d}_{12,35}$, $\mathfrak{d}_{14,23}$. Von jeder der 10 andern Geraden $\mathfrak{d}$ gehen also an Φ'_0 3 Tangentialebenen. $\mathfrak{d}_{14,35}$ trifft die 3 Geraden $\mathfrak{d}_{13,45}$, $\mathfrak{d}_{12,35}$, $\mathfrak{d}_{14,23}$ von Φ'_0. Soll eine vierte Gerade von Φ'_0 die $\mathfrak{d}_{14,35}$ treffen, so müsste dies in einer der 3 Verbindungsebenen von $\mathfrak{d}_{14,35}$ mit jenen 3 Geraden $\mathfrak{d}$ geschehen. Da nun $\overline{q}'_{0,1}$ keine von diesen $\mathfrak{d}$ trifft, so darf sie auch der $\mathfrak{d}_{14,35}$ nicht begegnen. Dasselbe gilt für $\mathfrak{d}_{12,45}$, $\mathfrak{d}_{15,23}$, $\mathfrak{d}_{13,24}$. $\mathfrak{d}_{24,35}$ gehört mit $\overline{q}'_{0,1}$ zur Regelschar $[d_{25,34}\ k_{24}\ k_{35}]$, müsste also mit $\overline{q}'_{0,1}$ zusammenfallen, wenn sie sie treffen sollte. Da aber $\mathfrak{d}_{24,35}$ die $\overline{q}_0$, welche von $\overline{q}'_{0,1}$ getroffen wird, nicht trifft, so ist das Zusammenfallen unmöglich. $q'_{0,1}$ ist windschief zu $\mathfrak{d}_{24,35}$ und, wie sich ähnlich zeigt, zu $\mathfrak{d}_{23,45}$. Die 4 noch übrigen Geraden $\mathfrak{d}$ treffen die $\mathfrak{d}_{25,34}$ entweder im Punkte E_{25} und in der Ebene δ_{25} oder im Punkte E_{34} und in der Ebene δ_{34}. Da $\overline{q}'_{0,1}$ weder durch E_{25} noch durch E_{34} geht, so müsste sie, wenn sie eine der 4 Geraden träfe, in δ_{25} oder δ_{34} liegen. Sie liege in δ_{25}. In dieser Ebene liegt nicht die Gerade $s_{2,13}$ des Quintupels $Q'_{0,1}$ denn es würde sonst die Gerade $d_{23,45}$, welche $\mathfrak{d}_{25,34}$ und $s_{2,13}$ in den verschiednen Punkten $T_{23,45}$ und D_{23} trifft, auch in der Ebene δ_{25} liegen, also u. a. $\mathfrak{d}_{13,25}$ treffen, was nach Nr. 12 ausgeschlossen ist. $s_{2,13}$ hat also mit δ_{25} nur den Punkt E_{13} gemein, und $\overline{q}'_{0,1}$ müsste nun durch diesen

Punkt gehen. $\overline{q'_{0,1}}$ träfe dann aber die Gerade k_{13} der Quintupel $Q'_{0,4}$ und $Q'_{0,5}$, was ja unmöglich ist. $q'_{0,1}$ liegt also nicht in δ_{25} und aus ähnlichen Gründen nicht in δ_{34}, und so haben wir, wenn wir gleich verallgemeinern, den Satz:

Eine Gerade $q_{i,k}$ trifft die Geraden d_k III und δ_k III der Anordnung A_i und sonst keine Gerade d oder δ.

64. $\overline{\overline{q_1}}$ ist windschief zu den Geraden k^I der A_0' (Nr. 36), die ja Leitstrahlen von (A_0') sind. Also ist auch $\overline{q'_{0,1}}$ zu ihnen windschief. $\overline{q'_{0,1}}$ ist daher zu sämtlichen 8 nicht in ihrem Quintupel enthaltnen Kanten windschief, denn von den 5 k^{II} auf F_0' trifft sie nur 2.

$\overline{q'_{0,1}}$ trifft $s_{2,13}$ und $s_{5,14}$ (Tafel III) und trifft von vornherein nicht $s_{1,25}$, $s_{3,24}$, $s_{4,35}$, denn das sind die übrigen Geraden s auf F_0'. Es bleiben noch 25 Geraden s zu betrachten. Unter diesen gibt es zunächst 10 Leitstrahlen in bezug auf (A_0'), nämlich die s^{III}. Träfe $\overline{q'_{0,1}}$ eine von diesen Geraden, so müsste ihre Polare $\overline{\overline{q_1}}$ sie auch treffen. Wir haben in Nr. 36 gezeigt, dass dies nicht der Fall ist. — Jetzt nehmen wir eine der 5 Geraden s^{II}, etwa $s_{3,15}$. Auf Φ liegen in ε_{15} und gehen durch D_{15} die 3 Diagonalen $d_{15,23}$, $d_{15,24}$, $d_{15,34}$. Dual gehen auf F_0' durch P_3 und liegen in ε_{24} die 3 Geraden k_{35}, $d_{15,24}$, k_{13}. $s_{3,15}$ trifft alle diese 3 Geraden in ε_{24}, darf also ausser den 3 Schnittpunkten keinen weiteren Punkt mit F_0' gemein haben. Soll nun $\overline{q'_{0,1}}$ die $s_{3,15}$ treffen, so müsste dies, da $\overline{q'_{0,1}}$ auch k_{35} trifft, in D_{35} geschehen, und $\overline{q'_{0,1}}$ müsste daher der $d_{12,35}$ begegnen, was ja unmöglich ist. Ganz ähnlich ist der Beweis bei $s_{2,45}$, $s_{4,12}$, $s_{5,23}$ zu führen. — Es bleibt noch eine Gerade s^{II} zu betrachten, nämlich $s_{1,34}$. Sie treffe $\overline{q'_{0,1}}$. Dann müsste $\overline{\overline{q_1}}$, ihre Polare in bezug auf (A_0'), die Schnittgerade der Ebenen $\tau_{14,35}$ und $\tau_{13,24}$ treffen, die den Punkten D_{13} und D_{14} entsprechen. Dieser Gerade aber entspricht in (A_1') die $\delta_{24,35}$, und diese müsste, da ihre Polare die $\overline{q_1}$ trifft, die $\overline{q_1}$ treffen. Das ist aber nicht der Fall. Folglich ist $s_{1,34}$ windschief zu $\overline{q'_{0,1}}$, ebenso natürlich

zu $\overline{q_0'_{,1}}$. — Jetzt kommen wir zu den $\overline{s^{III}}$. $s_{3,12}$ treffe $\overline{q'_{0,1}}$. Da sie mit $s_{2,13}$ den Punkt D_{23} gemein hat und in der Ebene ε_{45} liegt, so müsste $\overline{q'_{0,1}}$ entweder in der ε_{45} liegen oder durch den Punkt D_{23} gehen. In jenem Falle würde $\overline{q'_{0,1}}$ der $d_{13,45}$ begegnen, in diesem der $d_{14,23}$, was beides unmöglich ist. $s_{3,12}$ ist also windschief zu $\overline{q'_{0,1}}$, und, wegen ähnlicher Gründe, sind auch die andern 9 Geraden s^{III} windschief zu $\overline{q'_{0,1}}$. $\overline{q'_{0,1}}$ trifft daher nur 2 Diagonalstrahlen, und wir haben nun erkannt:

I. Jede Gerade $q_{i,k}$ trifft eine Gerade d, eine Gerade $\mathfrak{d}$, *2 Geraden k und 2 Geraden s. Zu allen andern Geraden d,* $\mathfrak{d}$, *k, s ist sie aber windschief.*

Fiele eine Gerade $q_{i,k}$ mit einer $q_{l,m}$ zusammen, so müsste sie ja, da keine 2 Quintupel in allen Geraden k und s übereinstimmen, mehr als 2 Geraden k oder mehr als 2 Geraden s treffen. Das ist, wie eben erkannt wurde, unmöglich. Ebenso kann die $q_{i,k}$ mit keiner der Treffgeraden q_j der Grundquintupel zusammenfallen, da sie ja dann mehr als eine Gerade d treffen müsste. Also haben wir den Satz:

II. Keine 2 von den 120 Geraden $q_{i,k}$ können zusammenfallen, und keine $q_{i,k}$ kann mit einer q_j zusammenfallen.

65. Auf einer Gerade g, die zwei Flächen dritter Ordnung F_1^3 und F_2^3 gemeinsam ist, können wir eine Korrespondenz [2,2] zwischen ihren Punkten auf folgende Weise herstellen. Jedem Punkte X kommt eine Berührungsebene durch g zu in bezug auf F_1^3. Diese Ebene berührt die F_2^3 in 2 Punkten X_1' und X_2', den Schnittpunkten der g mit dem Kegelschnitte, welcher sie zum vollen Schnitte ergänzt. Diese beiden Punkte ordnen wir dem X zu. Jedem der beiden Punkte X' werden dadurch auch 2 Punkte X zugeordnet. Wir haben 4 Koinzidenzpunkte. Zu jedem von ihnen gehört dieselbe Berührungsebene in bezug auf beide Flächen, das heisst, die Flächen berühren sich in ihm, und die Schnittkurve hat daher in ihm einen Doppelpunkt:

Auf jeder, zwei Flächen dritter Ordnung gemeinsamen Gerade haben wir 4 Doppelpunkte der Gesamtschnittkurve[1]).

[1]) Man sehe auch Sturm, Flächen 3. Ordnung, Nr. 60.

Ist nun noch ein fünfter Doppelpunkt auf g vorhanden, so findet auch in ihm Berührung statt, unsre Korrespondenz besitzt 5 Koinzidenzen, das heisst, jeder Punkt von g ist Koinzidenzpunkt, und die Flächen berühren sich dann längs g. g ist in diesem Falle im Schnitt der beiden Flächen doppelt zu zählen.

66. Jetzt gehen wir auf das Verhalten der Geraden q unter sich genauer ein. Wir sehen zunächst die Geraden $q_{i,k}$ auf 2 Flächen mit gleichem Zeiger, etwa F'_0 und F''_0, an. $\bar{q}'_{0,1}$ liegt mit $d_{25,34}$ und $\bar{\bar{q}}_0$ in derselben Ebene. In dieser Ebene liegt aber auch $q''_{0,1}$. Die Geraden $\bar{q}'_{0,1}$ und $\bar{q}''_{0,1}$ treffen also einander. Der Treffpunkt muss ein Punkt der Schnittkurve neunter Ordnung sein, welche den Flächen F'_0 und F''_0 gemein ist. Diese R^9 besteht aus den 5 gemeinsamen Geraden d und den beiden Geraden $\bar{q}_0$, $\bar{\bar{q}}_0$. Die letzteren sind doppelt zu zählen, weil auf ihnen 5 Doppelpunkte der Gesamtschnittkurve liegen. Die beiden Flächen berühren sich also längs $\bar{q}_0$ und $\bar{\bar{q}}_0$[1]). Die Schnittpunkte der beiden $\bar{q}_0$ mit den Geraden d gelten nun jeder als 2 Doppelpunkte der Schnittkurve, und die 4 Berührungspunkte auf jeder d fallen also in 2 doppelte zusammen. Ausserhalb dieser beiden Punkte darf es keinen Berührungspunkt auf einer Diagonale geben. Der Punkt $\bar{q}'_{0,1}\ \bar{q}''_{0,1} = Z$ kann nun, da er der Schnittkurve $F'_0\ F''_0$ angehört, entweder auf $d_{25,34}$ oder auf $\bar{\bar{q}}_0$ liegen, denn von den 7 Geraden werden nur diese beiden von $\bar{q}'_{0,1}$ und $\bar{q}''_{0,1}$ getroffen. Läge Z auf $d_{25,34}$, so würde die Ebene $q'_{0,1}\ \bar{q}''_{0,1}$, $d_{25,34}$ im Punkte Z sowohl F'_0 als auch F''_0 berühren, das heisst, die Flächen müssten sich in Z berühren. Da Z verschieden ist vom Punkte $\bar{\bar{q}}_0\ d_{25,34}$, so ist dies nach dem obigen nicht möglich, folglich treffen sich $\bar{q}'_{0,1}$ und $\bar{q}''_{0,1}$ auf $\bar{\bar{q}}_0$. Diese 3 Geraden gehen also durch einen Punkt und liegen in einer Ebene, in der sich auch $d_{25,34}$ befindet.

---

[1]) R. Sturm, Mathem. Ann. Bd. 23, S. 300.

67. Begegnete nun $\bar{q}'_{0,1}$ noch einer der Geraden q''_0, so müsste dies entweder im Punkte $\bar{q}_0$ $\bar{q}''_{0,1}$ oder auf $d_{25,34}$ geschehen; da nämlich $\bar{q}'_{0,1}$ in der Ebene des Dreiseits $d_{25,34}$ q_0 $q''_{0,1}$ der Fläche F''_0 liegt, so darf sie die F''_0 in keinem andern Punkte als ihren Schnittpunkten mit den Seiten dieses Dreiseits treffen. Durch $\bar{q}_0$ $\bar{q}''_{0,1}$ geht keine andre Gerade q''_0, es bleibt daher nur die Möglichkeit, dass $\bar{q}'_{0,1}$ eine q''_0 auf $d_{25,34}$ treffe. Das könnte nur $\bar{q}''_{0,1}$ sein. Es ist also zunächst klar, dass 2 Geraden $q_{i,k}$ mit verschiednen Akzenten, die in den ersten Zeigern übereinstimmen und sich in den zweiten unterscheiden, sich nicht treffen. — Wir wissen, dass sich $\bar{q}_1$ und $\bar{\bar{q}}_0$ auf $d_{25,34}$ treffen (No. 39, Satz II). Wir transformieren das nach der Kollineation (A'_0) (A''_1); da dieses Produkt kommutativ ist (No. 29), so führen wir die Transformation von $\bar{q}_1$ und $\bar{\bar{q}}_0$ in folgender einfachen Weise aus: wir transformieren q_1 erst nach (A''_1) in $\bar{q}_1$, dann nach (A'_0) in $\bar{q}'_{0,1}$, und wir transformieren q_0 erst nach (A'_0) in q_0, dann nach (A''_1) in $\bar{q}''_{1,1}$ (No. 61). Wir erhalten so die der obigen Beziehung entsprechende: $q'_{0,1}$ und $\bar{q}''_{1,1}$ begegnen einander auf $d_{25,34}$. Es würde nun folgen, dass $q''_{0,1}$ und $q''_{1,1}$ sich treffen. Da beide zur Regelschar $[d_{25,34}\ k_{23}\ k_{45}]$ gehören und nach No. 64 Satz II nicht zusammenfallen können, so ergibt sich, dass auch $q''_{0,1}$ zu $q'_{0,1}$ windschief ist. Wir haben den Satz:

Unterscheiden sich 2 Geraden $q_{i,k}$ nur durch die Akzente, so treffen sie einander auf $\overset{u}{q}_i$. Alle 3 Geraden liegen ausserdem in derselben Ebene. Je 2 Geraden $q_{i,k}$, die sich ausser durch die Akzente durch den zweiten Zeiger oder durch den Querstrich unterscheiden, sind windschief zueinander.

68. Nun gehen wir zu den Geraden $q_{i,k}$ zweier Flächen die sich im Zeiger und im Akzent unterscheiden und untersuchen zunächst die Geraden mit den zweiten untern Zeigern 2 und 5 auf den Flächen F'_0 und F''_1. Zu $Q'_{0,2}$ gehört

das Tripel von windschiefen Geraden $d_{13,45}$, k_{14}, k_{35}, und zu $Q''_{1,2}$ gehört das Tripel $d_{14,35}$, k_{13}, k_{45}. Wir bemerken, dass die Tripel 2 verbundnen Regelscharen angehören. Da nun aber zu diesen Regelscharen auch die Geraden $\overline{q''}_{1,2}$, $\overline{\overline{q''}}_{1,2}$ bzw. $\overline{q'}_{0,2}$, $\overline{\overline{q'}}_{0,2}$ gehören, so müssen jene beiden Geraden diesen beiden begegnen. Die 4 Geraden bilden also ein windschiefes Vierseit. Nun treffen sie aber alle die Gerade $s_{1,25}$, und da sie nicht alle in einer Ebene liegen, so heisst das, die Gerade $s_{1,25}$ ist Diagonale des Vierseits.

Sehen wir uns nun die Quintupel $Q'_{0,5}$ und $Q''_{1,5}$ an, so finden wir auch in ihnen 2 zu verbundnen Regelscharen gehörende Tripel, nämlich $d_{14,23}$, k_{13}, k_{24} und $d_{13,24}$, k_{14}, k_{23}. Also bilden auch die Geraden $q'_{0,5}$ mit den $q''_{1,5}$ ein windschiefes Vierseit, dessen eine Diagonale wieder $s_{1,25}$ sein muss. Es gibt mithin 4 Geradenpaare $q'_{0,i}$ $q''_{1,i}$ ($i = 2,5$), die ihre Doppelpunkte auf $s_{1,25}$ haben und 4 Geradenpaare $q'_{0,i}$ $q''_{1,i}$ ($i = 2,5$), die ihre Doppelpunkte ausserhalb $s_{1,25}$ haben. Wir haben nun zu untersuchen, wie die Querstriche dieser Paare beschaffen sind.

69. Es können 2 Hauptfälle mit je 2 Unterfällen eintreten:

I.
$\overline{q'}_{0,2}$ trifft $\overline{q''}_{1,2}$
$\overline{\overline{q'}}_{0,2}$ trifft $\overline{\overline{q''}}_{1,2}$
a. $\overline{q'}_{0,5}$ trifft $\overline{\overline{q''}}_{1,5}$
$\overline{\overline{q'}}_{0,5}$ trifft $\overline{q''}_{1,5}$
b. $\overline{q'}_{0,5}$ trifft $\overline{q''}_{1,5}$
$\overline{\overline{q'}}_{0,5}$ trifft $\overline{\overline{q''}}_{1,5}$
} auf $s_{1,25}$

II.
$\overline{q'}_{0,2}$ trifft $\overline{\overline{q''}}_{1,2}$
$\overline{\overline{q'}}_{0,2}$ trifft $\overline{q''}_{1,2}$
a. $\overline{q'}_{0,5}$ trifft $\overline{q''}_{1,5}$
$\overline{\overline{q'}}_{0,5}$ trifft $\overline{\overline{q''}}_{1,5}$
b. $\overline{q'}_{0,5}$ trifft $\overline{\overline{q''}}_{1,5}$
$\overline{\overline{q'}}_{0,5}$ trifft $\overline{q''}_{1,5}$
} auf $s_{1,25}$

Ia. Hier trifft $\overline{q'_{0,2}}$ die $\overline{\overline{q''_{1,2}}}$ ausserhalb $s_{1,25}$ und liegt also in der Ebene $\xi = \overline{\overline{q''_{1,2}}}\, s_{1,25}$. In der Ebene ξ liegt aber auch $\overline{q''_{1,5}}$. denn die 3 Geraden $\overline{\overline{q''_{1,2}}}$, $\overline{q''_{1,5}}$, $s_{1,25}$ bilden einen ebenen Schnitt von F''_1. $\overline{q''_{1,5}}$ trifft $\overline{q'_{0,5}}$ ausserhalb $s_{1,25}$, und so muss auch $\overline{q'_{0,5}}$ in ξ liegen. Es müssten sich daher $\overline{q'_{0,2}}$ und $\overline{q'_{0,5}}$ treffen. Dieser Fall ist also ausgeschlossen.

IIa. Dieser Fall erweist sich durch eine analoge Betrachtung als unmöglich. In der Ebene $\xi = \overline{q'_{0,2}}\, s_{1,25}$ liegen hier der Reihe nach $\overline{q''_{1,2}}$, $\overline{\overline{q''_{1,5}}}$, $\overline{q'_{0,5}}$. Wieder müssten sich $\overline{q'_{0,2}}$ und $q'_{0,5}$ treffen.

70. Wir haben also noch die Entscheidung zwischen den Fällen Ib und IIb zu treffen, die wir fernerhin, da ja Ia und IIa ausgeschaltet sind, nur noch als I und II unterscheiden werden. — Die Gerade $\overline{q'_{0,2}}$ trifft nun im Falle I die $\overline{\overline{q''_{1,2}}}$ und $s_{1,25}$, aber nicht in ihrem Schnitte; also liegt sie in ihrer verbindenden Ebene und muss die in derselben Ebene liegende $\overline{q''_{1,5}}$ treffen. Zu $\overline{\overline{q''_{1,5}}}$ ist sie dann aber sicher windschief, denn träfe sie auch diese, so könnte dies nur im Punkte $\overline{q'_{0,2}}$ $\overline{q''_{1,2}}$ $s_{1,25}$ geschehen, weil ja $\overline{q'_{0,2}}$ sonst noch einen vierten Punkt mit F'_1 gemein hätte; das würde aber erfordern, dass $\overline{\overline{q''_{1,5}}}$, $\overline{q''_{1,2}}$ und $s_{1,25}$ durch einen Punkt gehen, und dies ist ja nicht der Fall. — $\overline{q'_{0,2}}$ und $\overline{q''_{1,5}}$ treffen ausser der $s_{1,25}$ noch gemeinsam die k_{14}. Da sie mit jener in derselben Ebene liegen, so müssen sie diese in demselban Punkte treffen. Wir haben nun die 3 Punkte erkannt, in denen $\overline{q'_{0,2}}$ die F''_1 trifft, wenn Fall I der richtige ist, nämlich

$$\overline{q'_{0,2}}\ \ \overline{q''_{1,2}}\ s_{1,25}, \qquad \overline{q'_{0,2}}\ \ \overline{\overline{q''_{1,2}}}, \qquad \overline{q'_{0,2}}\ \ \overline{q''_{1,5}}\ k_{14}.$$

Der zweite und dritte Punkt sind verschieden, da sonst $\overline{q''_{1,2}}$ die k_{14} träfe.

Nehmen wir Fall II als richtig an, so bekommen wir die folgenden 3 Punkte:

$$\overline{q'_{0,2}}\ \ \overline{\overline{q''_{1,2}}}\ s_{1,25}, \qquad \overline{q'_{0,2}}\ \ \overline{q''_{1,2}}, \qquad \overline{q'_{0,2}}\ \ \overline{\overline{q''_{1,5}}}\ k_{14}.$$

Auch hier erhalten wir 3 verschiedene Punkte, und wie oben ist einzusehen, dass $\overline{q'_{0,2}}$ nicht beide Geraden des Dupels $q''_{1,5}$ treffen kann, also zu $q''_{1,5}$ windschief ist. Wir schreiben uns die neuen Treffbeziehungen, welche uns die dritten Punkte liefern, für beide Fälle hin:

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{lll} \overline{q'_{0,2}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,5}} \\ \overline{\overline{q'_{0,2}}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,5}}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{14},$$

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{q'_{0,5}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,2}} \\ \overline{\overline{q'_{0,5}}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,2}}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{13}.$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{lll} \overline{q'_{0,2}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,5}}} \\ \overline{\overline{q'_{0,2}}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,5}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{14},$$

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{q'_{0,5}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,2}}} \\ \overline{\overline{q'_{0,5}}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,2}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{13}.$$

71. Jetzt untersuchen wir die Geraden mit den zweiten untern Zeigern 2, 5 auf F''_0 und F'_1. Da hier die Geraden $q''_{0,2}$ und $q'_{1,5}$ zu den verbundenen Regelscharen $[d_{13,45}\ k_{15}\ s_{4,12}]$ und $[d_{13,24}\ k_{12}\ s_{4,15}]$ gehören, so treffen die beiden $q''_{0,2}$ die beiden $q'_{1,5}$. Ebenso treffen die beiden $q''_{0,5}$ die beiden $q'_{1,2}$. Genau wie oben sind hier nun 2 Fälle möglich, nachdem sich die Unterfälle wieder als unmöglich ausgeschaltet haben:

$$1.\quad \left.\begin{array}{lll} \overline{q''_{0,2}} & \text{trifft} & \overline{q'_{1,5}} \\ \overline{\overline{q''_{0,2}}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q'_{1,5}}} \\ \overline{q''_{0,5}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,2}} \\ \overline{\overline{q''_{0,5}}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q'_{1,5}}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{34}.$$

$$2.\quad \left.\begin{array}{lll} \overline{q''_{0,2}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q'_{1,5}}} \\ \overline{\overline{q''_{0,2}}} & \text{trifft} & \overline{q'_{1,5}} \\ \overline{q''_{0,5}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q'_{1,2}}} \\ \overline{\overline{q''_{0,5}}} & \text{trifft} & \overline{q'_{1,2}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{34}.$$

Im Falle 1 trifft $\overline{q''_{0,2}}$ die F'_1 in den 3 verschiedenen Punkten:

$$\overline{q''_{0,2}}\ \overline{q'_{1,5}}\ k_{34}, \qquad \overline{q''_{0,2}}\ \overline{q'_{1,5}}, \qquad \overline{q''_{0,2}}\ \overline{\overline{q'_{1,2}}}\ k_{15}.$$

Im Falle 2 haben wir die 3 Treffpunkte:

$\overline{\overline{q''_{0,2}}}\ \overline{\overline{q'_{1,5}}}\ k_{34}$, $\overline{q''_{0,2}}\ \overline{q'_{1,5}}$, $\overline{q''_{0,2}}\ \overline{\overline{q'_{1,2}}}\ k_{15}$.

Im ganzen können nun noch 4 Fälle eintreten, die wir mit I_1, I_2, II_1, II_2 bezeichnen.

72. Fall I_2 z. B. ist der folgende: Die Geraden von F'_0 und F''_1 gehorchen den Gesetzen des Falles I, die Geraden von F''_0 und F'_1 denen des Falles 2.

I_2. Hier treffen sich $\overline{q'_{0,2}}$ und $\overline{q''_{1,5}}$ auf k_{14} im Punkte X. Es liegen in einer Ebene ξ die Geraden $\overline{q'_{0,2}}$, $\overline{q''_{0,2}}$ $d_{13,45}$ (Nr. 66), in einer Ebene η die Geraden $\overline{q''_{1,5}}$, $\overline{q'_{1,5}}$, $d_{13,24}$. $d_{13,45}$ und $d_{13,24}$ haben den Punkt D_{13} gemein. Die Gerade $\xi\eta = z$ enthält also die verschiednen Punkte X und D_{13}. Durch X geht k_{14}, und z liegt daher in der Ebene $D_{13}\ k_{14} = \varepsilon_{25}$, in der sich auch k_{34} befindet, welche sowohl $\overline{q''_{0,2}}$ wie $\overline{q'_{1,2}}$ trifft. Ebenso, wie in Nr. 70 gezeigt wurde, dass $\overline{q'_{0,2}}$ windschief ist im Falle I zu $\overline{\overline{q''_{1,5}}}$, im Falle II zu $\overline{q''_{1,5}}$, so folgt jetzt, dass $\overline{q''_{0,2}}$ im Falle 2 windschief ist zu $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$, denn es verhalten sich die Geraden $q''_{0,2}$ zu den $q'_{1,2}$ wie die Geraden $q'_{0,2}$ zu den $q''_{1,5}$. Diese beiden windschiefen Geraden $q''_{0,2}$ und $\overline{q'_{1,2}}$ können beide die z und k_{34} der Ebene ε_{25} nur dann treffen, wenn diese letzteren Geraden zusammenfallen. Das ist aber unmöglich, da k_{34} nicht durch D_{13} geht. Der Fall I_2 ist mithin ausgeschlossen.

73. II_1. $\overline{q'_{0,2}}$ und $\overline{\overline{q''_{1,2}}}$ treffen sich auf $s_{1,25}$. Die Ebenen $\overline{q'_{0,2}}\ \overline{q''_{0,2}}\ \overline{q_0} = \xi$ (Nr. 67) und $q'_{1,2}\ \overline{\overline{q''_{1,2}}}\ q_1 = \eta$ schneiden sich in einer Gerade z, auf der die Punkte $\overline{q'_{0,2}}\ \overline{\overline{q''_{1,2}}} = X$ und $\overline{\overline{q_0}}\ \overline{q_1} = Y$ liegen müssen. Durch Y geht nun aber die Diagonale $d_{25,34}$ (Nr. 39, Satz II), die mit der durch X gehenden Gerade $s_{1,25}$ in ε_{34} liegt; z liegt also auch in ε_{34}. Im Falle 2 zeigte sich (Nr. 72), dass $\overline{q''_{0,2}}$ zu $q'_{1,2}$ windschief ist. Jetzt, im Falle 1, ergibt sich analog, dass $\overline{q''_{0,2}}$ zu $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ windschief ist. Die Punkte $\overline{q''_{0,2}}$ z und $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ z sind daher verschieden. In ε_{34} liegt auch k_{15}

die sowohl $\overline{q''_{0,2}}$ als auch $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ trifft und daher mit z identisch sein muss. Das ist aber nicht möglich, weil u. a. $\overline{q'_{0,2}}$ die k_{15} nicht trifft. Fall II_1 ist also ebenfalls ausgeschlossen. Wir haben nun noch die Entscheidung zu fällen zwischen I_1 und II_2.

74. I_1. Wir betrachten die Ebenen $\overline{q'_{0,2}}\ q''_{0,2}\ \overline{\overline{q_0}} = \xi$ und $\overline{q''_{1,5}}\ \overline{q'_{1,5}}\ \overline{\overline{q_1}} = \eta$. Auf $\xi\ \eta = z$ liegen die Punkte $\overline{q'_{0,2}}\ \overline{q''_{1,5}} = X$, $\overline{q''_{0,2}}\ \overline{q'_{1,5}} = Y$, $\overline{\overline{q_0}}$ z und $\overline{\overline{q_1}}$ z. Durch X geht k_{14} (Nr. 70), durch Y geht k_{34} (Nr 71). X und Y sind verschieden, denn sonst fielen sie ja in den Punkt P_4 zusammen. z liegt also in ε_{25}, in der sich auch $d_{25,34}$ befindet. Diese Gerade wird sowohl von $\overline{\overline{q_0}}$ als auch von $\overline{\overline{q_1}}$ getroffen. Daraus folgt $z = d_{25,34}$. Da z. B. $\overline{q'_{0,2}}$ die $d_{25,34}$ nicht trifft, so ist auch dieser Fall ausgeschlossen, und es bleibt als einzig möglicher der Fall II_2. — In der Tat, stellen wir ähnliche Untersuchungen, wie wir sie bei den übrigen Fällen ausgeführt haben, bei diesem Falle an, so stossen wir auf keinen Widerspruch.

75. Nun transformieren wir die Geraden, welche bei Fall II vorkommen, nach der Kollineation $(A'_0)\,(A''_1)$. Wir bekommen dann die folgenden neuen Beziehungen:

Es treffen die Geraden des Dupels $q'_{0,3}$ die Geraden des Dupels $q''_{1,4}$; es treffen die Geraden $q'_{0,4}$ die Geraden $q''_{1,3}$, und zwar bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{q'_{0,3}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,4}}} \\ \overline{\overline{q'_{0,3}}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,4}} \\ \overline{q'_{0,3}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,3}}} \\ \overline{\overline{q'_{0,3}}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,3}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{25};$$

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{q'_{0,3}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,3}}} \\ \overline{\overline{q'_{0,3}}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,3}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{14};$$

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{q'_{0,4}} & \text{trifft} & \overline{\overline{q''_{1,4}}} \\ \overline{\overline{q'_{0,4}}} & \text{trifft} & \overline{q''_{1,3}} \end{array}\right\} \text{auf } k_{13}.$$

Auf jeder der Geraden k_{13}, k_{14}, k_{25}, $s_{1,25}$ haben wir also 4 Treffpunkte von Geraden $q'_{0,i}$ mit $q''_{1,k}$ (i, k = 2, 3, 4, 5).

Die Querstriche zweier Geraden q, welche sich auf einer dieser 4 Geraden treffen, sind stets ungleich.

76. Ein ganz ähnliches Verhalten zeigen die Geraden $q''_{0,i}$ und $q'_{1,k}$ (i, k = 2, 3, 4, 5) zueinander. Vergleichen wir die Resultate bei den letzteren mit denen, welche wir bei den $q'_{0,i}$ und $q''_{1,k}$ erhalten haben, so entspricht dem Verhalten der $q'_{0,3}$ $q'_{0,4}$ zu den $q''_{1,3}$, $q''_{1,4}$ das Verhalten $q''_{0,2}$, $q''_{0,5}$ zu den $q'_{1,2}$, $q'_{1,5}$. Allgemeinere Regeln werden später aufgestellt, wenn wir über das Verhalten der Geraden q zueinander genau Bescheid wissen.

77. Wir gehen jetzt zu den Geraden q_i zurück. Wenn eine Gerade q_i eine der 12 Flächen F in Punkten ihrer Geraden treffen soll, so kann das nur noch auf Geraden d oder $q_{j,k}$ geschehen. Nehmen wir nun z. B. die Gerade $\overline{q_0}$ und sehen zu, wie sie sich zu den Geraden von F'_1 verhält. $\overline{q_0}$ trifft die Fläche F'_1 im Punkte $\overline{\overline{q_1}}$ $d_{25,34} = X$ (Nr. 39, Satz 2), und zwar liegen die 3 Geraden, wie wir von unsrer Fläche F her wissen, nicht in einer Ebene. Von den auf F'_1 vorkommenden Geraden d trifft $\overline{q_0}$ keine ausser $d_{25,34}$, keine weitere Gerade von F'_1 geht durch X. $\overline{q'_{1,1}}$ trifft die Geraden $\overline{\overline{q_1}}$ und $d_{25,34}$ von F'_1 in Punkten, die beide verschieden von X sind, und ist somit windschief zu $\overline{q_0}$. — $\overline{\overline{q'_{1,1}}}$ trifft $d_{25,34}$. Träfe sie auch $\overline{q_0}$, so würde $\overline{q_0}$ auch von der in der Ebene $\overline{\overline{q'_{1,1}}}$ $d_{25,34}$ liegenden Gerade $\overline{q_1}$ getroffen werden. Die beiden Geraden $q'_{1,1}$ sind also windschief zu $\overline{q_0}$. — Die Gerade $\overline{\overline{q_1}}$ von F'_1 wird noch getroffen von $\overline{q'_{1,2}}$, $\overline{q'_{1,3}}$, $\overline{q'_{1,4}}$, $\overline{q'_{1,5}}$. Es treffe eine von diesen Geraden, etwa $\overline{q'_{1,2}}$, die $\overline{q_0}$. Der ebene Schnitt $q'_{1,2}$ $\overline{\overline{q_1}}$ wird zum vollen Schnitt durch $d_{14,35}$ ergänzt (Tafel III). Diese Gerade müsste dann $\overline{q_0}$ treffen, was wieder unmöglich ist. Mit den 3 andern Geraden steht es ebenso, also sind alle 4 windschief zu $\overline{q_0}$. — Jetzt haben wir noch die Geraden $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$, $\overline{\overline{q'_{1,3}}}$, $\overline{\overline{q'_{1,4}}}$, $\overline{\overline{q'_{1,5}}}$ zu betrachten. $\overline{\overline{q'_{1,3}}}$ treffe $\overline{q_0}$. U. a. trifft sie auch die Geraden $d_{12,45}$ und k_{24}. Die 3 Geraden $d_{12,45}$,

k_{24}, $\overline{q_0}$ treffen gemeinsam die Geraden $d_{13,45}$, $d_{12,35}$, $d_{15,24}$. $\overline{q'_{1,3}}$ gehörte also mit den 3 letzten Geraden zu einer Regelschar, und müsste, da diese 3 Geraden die $s_{3,15}$ treffen, auch diese Gerade treffen. Das ist nach Nr. 64, Satz I nicht der Fall. $\overline{\overline{q'_{1,3}}}$ ist daher windschief zu $\overline{q_0}$. Ein ähnlicher Beweis ergiebt sich für $\overline{\overline{q'_{1,4}}}$. Sie müsste, wenn sie $\overline{q_0}$ träfe, $s_{4,12}$ treffen.

78. $\overline{q_0}$ treffe $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$. $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ geht schon durch die Punkte $\overline{q''_{0,5}}$ k_{34}, $\overline{q''_{0,1}}$ k_{15} und trifft auch $\overline{\overline{q''_{0,5}}}$ (Nr. 71, Fall II). Durch einen dieser 3 Schnittpunkte von $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ mit F'_0 müsste auch $\overline{q_0}$ gehen. Ginge sie durch einen der ersten beiden, so träfe sie k_{34} bzw. k_{15}. Dies ist ausgeschlossen, und es bliebe also nur die Möglichkeit, dass $\overline{q_0}$ durch Punkt $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ $\overline{\overline{q''_{0,5}}}$ geht. Auf $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ lägen jetzt die 3 notwendig verschiedenen Punkte $\overline{q_0}$ $\overline{q''_{0,5}}$, k_{34} $\overline{q''_{0,5}}$, k_{15} $\overline{q''_{0,2}}$. Die Geraden k_{34}, $\overline{\overline{q''_{0,5}}}$, $\overline{q''_{0,2}}$ bilden ein Dreiseit der kubischen Fläche F''_0, und die Geraden $\overline{\overline{q''_{0,5}}}$, $\overline{q_0}$, k_{15} sind 3 zueinander windschiefe Geraden von F''_0, von denen jede eine Seite jenes Dreiseits trifft. Die 3 Treffpunkte sollen auf einer Gerade, nämlich $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$, liegen. Wir transformieren unsre Figur nach (A''_0) und erhalten dadurch folgendes (Nr. 61, Satz II):

Die Kanten des Dreikants $d_{24,35}$, $\overline{q_5}$, $\overline{\overline{q_2}}$ werden bzw. durch die Linien q_5, $\overline{q_0}$, $d_{14,25}$ in 3 Ebenen eines Büschels getroffen. In der Ebene $\overline{q_0}$ $\overline{q_5}$ liegt die Gerade $\delta_{14,23}$, (Nr. 39, Satz II), welche auch $\overline{q_5}$ trifft. Da nun dieser Treffpunkt auf der Axe des Büschels liegen muss, so liegt Punkt $\overline{q_5}$ $\delta_{14,23}$ in der Ebene $\overline{\overline{q_2}}$ $\delta_{14,25}$. Transformieren wir nach $(W_{14,25})$, so ergibt sich (Tafel II), dass Punkt $\overline{\overline{q_1}}$ $\delta_{14,35}$ auch in der Ebene $\overline{\overline{q_2}}$ $\delta_{14,25}$ liegen muss. Wäre also unsre obige Annahme richtig, so müsste $\overline{\overline{q_2}}$ die Verbindungslinie der Punkte $\overline{\overline{q_5}}$ $\delta_{14,23}$ und $\overline{\overline{q_1}}$ $d_{14,35}$ treffen. Nun begegnet $\overline{\overline{q_2}}$ aber der dritten in δ_{14} liegenden Fünfflachdiagonale

$\delta_{14,25}$, und wir überzeugten uns in Nr. 50, dass in einer Ebene δ keine 3 Punkte q', die auf den Geraden δ liegen, allineiert sind. Unsere Annahme ist damit als falsch erkannt: die Gerade $\overline{q}_0$ wird nicht von $\overline{q}'_{1,2}$ getroffen. Ein entsprechender Beweis lässt sich für $\overline{q}'_{1,5}$ liefern, und wir wissen nun, dass q_0 nur die Geraden $\overline{q}_1$ und $d_{25,34}$ von F'_1 trifft, und zwar beide im selben Punkte. Da nun die Geraden q_0 sowohl zur Anordnung A'_0 als auch zu A''_0 gehören, so hätten wir auch beweisen können, dass $\overline{q}_0$ keine Gerade q auf F''_1 ausser $\overline{q}_1$ trifft, und nun ist weiter sofort klar, dass q_0 überhaupt keine Gerade $q_{i,k}$ $(i > o)$ trifft. Was für $\overline{q}_0$ gilt, das gilt aber für jede Gerade q_i, und so bekommen wir den Satz:

Jede Gerade q_i *ist windschief zu allen Geraden* $q_{j,k}$ $(j \gtrless i)$.

79. Als ausgezeichnetes Quintupel zweier Flächen bezeichnen wir auf jeder von ihnen dasjenige, welches als zweiten Zeiger die ausgezeichnete Ziffer (Nr. 26) der beiden zu den Flächen gehörigen Anordnungen hat. Die zugehörigen Geraden $q_{i,k}$ nennen wir ausgezeichnete Geraden $q_{i,k}$ für die beiden Flächen. So haben wir auf den Flächen F'_0 und F''_1 die ausgezeichneten Quintupel $Q'_{0,1}$ und $Q''_{0,1}$, auf F'_1 und F'_3 die ausgezeichneten Quintupel $Q'_{1,2}$ und $Q'_{3,2}$.

80. Gehen wir nun wieder zu den Geraden q auf F'_0 und F''_1, so sehen wir, dass wir allein über das Verhalten der ausgezeichneten Geraden $q'_{0,1}$ und $q''_{0,1}$ noch nicht gesprochen haben. Sie sollen nun behandelt werden.

Die Gerade $\overline{q}_1$ ist nach Nr. 78 windschief zu den Geraden $\overline{q}_0$, $q'_{0,1}$, $q'_{0,2}$, $q'_{0,3}$ $q'_{0,4}$, $q'_{0,5}$ auf F'_0. Transformieren wir nach $(A'_0).(A''_1)$, wobei wir die Kommutativität dieses Produktes genau wie in Nr. 67 benützen, so erhalten wir: Die Gerade $q'_{0,1}$ ist windschief zu den Geraden $\overline{q}''_{1,1}$, q_1, $q''_{1,4}$, $q''_{1,2}$, $q''_{1,5}$, $q''_{1,3}$ (Nr. 61, Satz II). Wir sagten ferner schon in Nr. 67, dass $q'_{0,1}$ und $\overline{q}''_{1,1}$ sich auf $d_{25,34}$ treffen. Für

Geraden q mit gleichen Akzenten lässt sich ein entsprechender Beweis nicht ausführen, da die Produkte $(A'_i)(A'_k)$ und $(A''_i)(A''_k)$ nicht kommutativ sind. — Wir haben also, indem wir gleich verallgemeinern, dass Gesetz abgeleitet:

Auf 2 Flächen F'_i ; F''_k *seien* $Q'_{i,m}$, $Q''_{k,m}$ *die ausgezeichneten Quintupel. Es treffen sich dann* $\overline{q'}_{i,m}$ *und* $\overline{\overline{q''}}_{k,m}$ *sowie* $\overline{\overline{q'}}_{i,m}$ *und* $\overline{q''}_{k,m}$ *auf der jenen Quintupeln gemeinsamen Gerade d. Zu den übrigen Geraden* q *auf* F''_k *sind die* $q'_{i,m}$ *windschief, und ebenso sind die* $q''_{k,m}$ *zu den übrigen Geraden* q *auf* F'_i *windschief:*

81. Wir betrachten nun nochmals $\overline{q'}_{0,2}$. Wir wissen, dass sie windschief ist zu q_1, $\overline{\overline{q}}_1$, (Nr. 78), $q''_{1,1}$, $\overline{q''}_{1,1}$ (Nr. 79) und $\overline{q''}_{1,5}$ (Nr. 70, Fall II). $\overline{q'}_{0,2}$ begegne nun der Gerade $\overline{q''}_{1,3}$. Da $\overline{q'}_{0,2}$ schon 3 Punkte mit F''_i gemein hat, so müsste sie der $\overline{q''}_{1,3}$ in einem dieser 3 Punkte begegnen, das heisst, $\overline{q''}_{1,3}$ müsste entweder gehen durch 1) $\overline{q''}_{1,2}\ s_{1,25}$ oder durch 2) $\overline{q'}_{0,2}\ \overline{q''}_{1,2}$ oder durch 3) $\overline{\overline{q''}}_{1,5}\ k_{14}$. Bei den ersten beiden Fällen liegt die Unmöglichkeit darin, dass $\overline{q''}_{1,3}$ weder $s_{1,25}$ noch $\overline{q''}_{1,2}$ trifft, bei dem dritten Falle darin, dass $\overline{q''}_{1,3}$ zwar in der Ebene $\overline{\overline{q''}}_{1,5}\ k_{14}$ liegt aber nicht durch den gleichnamigen Punkt geht. Angenommen jetzt, $\overline{q'}_{0,2}$ träfe $\overline{\overline{q''}}_{1,3}$. Beide treffen k_{14}, aber nicht im selben Punkte, denn durch Punkt $\overline{q'}_{0,2}\ k_{14}$ geht $\overline{\overline{q''}}_{1,5}$, und diese Gerade trifft $\overline{\overline{q''}}_{1,3}$ nicht. $\overline{q'}_{0,2}$ läge daher in derselben Ebene mit $\overline{\overline{q''}}_{1,3}$ und k_{14}. In dieser liegt aber noch $\overline{q''}_{1,5}$, die also $\overline{q'}_{0,2}$ treffen müsste. Da dies unmöglich ist, so ist $\overline{q'}_{0,2}$ auch zu $\overline{\overline{q''}}_{1,3}$ windschief.

$\overline{q'}_{0,2}$ treffe $\overline{q''}_{1,4}$. Es leuchtet sofort ein, dass $\overline{q''}_{1,4}$ durch keinen der 3 oben unter 1), 2), 3) angegebenen Punkte geht, dass diese Annahme also falsch ist. — $\overline{q'}_{0,2}$ treffe $\overline{\overline{q''}}_{1,4}$. Durch die Punkte 1) und 3) kann $\overline{\overline{q''}}_{1,4}$ nicht gehen, sie müsste daher durch $\overline{q'}_{0,2}\ \overline{q''}_{1,2}$ gehen. Auf $\overline{q'}_{0,2}$ lägen dann die 3 Punkte $\overline{q''}_{1,2}\ s_{1,25}$, $\overline{q''}_{1,2}\ \overline{\overline{q''}}_{1,4}$, $\overline{\overline{q''}}_{1,5}\ k_{14}$.

$s_{1,25}$, $\overline{q''}_{1,2}$ $\overline{\overline{q''}}_{1,5}$ bilden ein Dreiseit auf F''_1. Die Seiten müssten von den 3 Windschiefen $\overline{\overline{q''}}_{1,2}$, $\overline{\overline{q''}}_{1,4}$, k_{14} in 3 Punkten einer Gerade, nämlich $\overline{q'}_{0,2}$, getroffen werden. Wir hatten diesen Fall schon in Nr. 78 und erkannten da seine Unmöglichkeit. In der Tat, wenn wir nach (A''_1) transformieren, so erhalten wir: Die Kanten des Dreikants $d_{23,45}$ $\overline{\overline{q_3}}$ $\overline{q_4}$ der Fläche Φ werden von den 3 windschiefen Geraden $\overline{q_3}$, q_2, $d_{15,34}$ in Ebenen eines Büschels getroffen. Genau wie damals folgt jetzt, dass Ebene $\overline{q_4}$ $d_{15,34}$ durch Punkt $\overline{q_3}$ $\delta_{12,34}$ gehen müsste und damit auch durch Punkt $\overline{q_1}$ $\delta_{25,34}$, dass also $\overline{q_4}$ die Verbindungsgerade dieser Punkte treffen müsste. Die Punkte $\overline{q_1}$, $\overline{q_3}$, $\overline{q_4}$ in δ_{34} lägen dann aber in gerader Linie. Das ist nach Nr. 50 nicht möglich, also ist $\overline{q'}_{0,2}$ auch windschief zu $\overline{q''}_{1,4}$. — Die Gerade $\overline{q'}_{0,2}$ trifft also auf F''_1 nur jene 3 Geraden $q''_{1,i}$. Ebenso wie zu den Geraden q''_1 verhält sich $q'_{0,2}$ zu den Geraden q''_j derjenigen weiteren 3 Flächen F''_j $(j > 0)$, für welche die Geraden $q''_{j,2}$ keine ausgezeichneten Geraden sind. Das Verhalten zu den Geraden von F''_2, wo ja $q''_{2,2}$ ausgezeichnete Geraden sind, entspricht dem Verhalten der $q'_{0,1}$ zu den Geraden von F'_1. — Wenn wir nun verallgemeinern und alle Resultate zusammenfassen, so erhalten wir folgende Regeln für die Geraden q zweier Flächen F, die verschiedne Akzente und Zeiger haben:

82. Wir wissen aus Nr. 59, dass wir von einer der zu zwei solchen Flächen gehörenden Anordnungen zu der andern durch einen Zyklus zweiten Grades (i k) übergehen können, wenn wir beachten, dass jede Anordnung nnd ihre Umkehrung identisch sind. Wir schreiben nun die beiden Anordnungen so untereinander, dass die Elemente i, k in jeder den Anfang und das Ende bilden, und dass, wenn die eine Anordnung mit i beginnt, die andere mit k beginnt. In der Mitte stehen dann in beiden Anordnungen dieselben 3 Elemente. Sind z. B. A'_1 und A''_2 gegeben, so haben wir den Zyklus (23) und müssen schreiben:

2 5 4 1 3
3 5 4 1 2.

Wir bemerken, dass die in der Mitte stehende Ziffer 4 die ausgezeichnete Ziffer der beiden Anordnungen im Sinne von Nr 26 ist. — Sind allgemein i k l m n und i k n m l die beiden Anordnungen, die wir, da sie ungleiche Akzente haben, mit A_r und A_s^u bezeichnen können, so lautet unsre Schreibweise

i n m l k
k n m l i.

m ist die ausgezeichnete Ziffer der Anordnungen A_r und A_s^u. — p bezeichne nun irgend eines der Elemente i, k, l, n, so nennen wir das vertikal zu p stehende Element p_v; das symmetrisch zu p_v in bezug auf m stehende Element welches also p diametral gegenüberliegt in dem Rechteck, dessen eine Mittellinie m m ist, nennen wir p_d. Ist etwa $p = i$, so ist $p_v = k$, $p_d = i$. Ist $p = l$, so ist $p_v = l$, $p_d = n$. Nun gilt für jede Gerade $q_{r,p}$ das Gesetz:

I. $q_{r,p}$ *trifft*

1) q^u_{s,p_v}, *2)* $\overset{u}{q}{}^u_{s,p_v}$, *3)* $\overset{u}{q}{}^u_{s,p_d}$.

Sie trifft die zweite Gerade auf der den Quintupeln $Q_{r,p}$ *und* Q^u_{s,p_v} *gemeinsamen Gerade, die dritte Gerade auf derjenigen von den beiden den Quintupeln* $Q_{r,p}$ *und* Q^u_{s,p_d} *gemeinsamen Geraden, welche nicht identisch ist mit der soeben erhaltenen Gerade. Zu allen andern Geraden* q^u_s *ist* $q_{r,p}$ *windschief, auch zu den beiden* q_s. *So trifft z. B. die Gerade* $\overline{q}'_{2,3}$ *die Geraden 1)* $\overline{q}'_{5,5}$, *2)* $\overline{q}'_{5,5}$ *auf* k_{24}, *3)* $\overline{q}'_{5,3}$ *auf* k_{15}.

II. $q_{r,m}$ *trifft* $\overset{u}{q}{}^u_{s,m}$ *auf* d^{III}_m *der Anordnung* A_r *und ist windschief zu allen andern* q^u_s, *auch zu den* q_s. (Nr. 80.)

III. Die Geraden q_r *treffen* $\overset{u}{q}_s$ *auf* d^{III}_m *von* A_r *und sonst keine Gerade* $q_{s,i}$. (Nr. 39, II und 79. Wegen der Bezeichnungen vergleiche man Nr. 61.)

83. Wir betrachten jetzt einige Verwandtschaften durch welche Flächen F_i wieder in Flächen unsrer Gruppe übergeführt werden.

Der Fläche F'_i entspricht die F''_k in der Kollineation $(A'_i)(A''_k)$. Dieses Produkt wurde in Nr. 29 als kommutativ erkannt. Ferner sahen wir, dass unsre Kollineation eine windschiefe Involution ist, welche als Axen eine Gerade u' und eine u'' hat:

Je 2 Flächen F'_i , F''_k *werden durch die in Nr. 29 beschriebne, zu* A'_i , A''_k *gehörige windschiefe Involution mit je einer Gerade u', u'' als Axen ineinander übergeführt. Jeder Gerade* q *entspricht eine solche mit gleichem Querstriche.*

84. Transformieren wir die eine von den Flächen F'_i , F''_k durch die beiden involutorischen Homologieen (J), welche als Zeiger die Vertauschungspaare (Nr. 27) von A'_i und A''_k besitzen, so gehen auch die Quintupel von F'_i in die von F''_k über, aber sie entsprechen ihnen in andrer Weise als in der Verwandtschaft $(A'_i)(A''_k)$. Die Flächen F'_i , F''_k entsprechen sich also auch in 2 Verwandtschaften (J_{rs}). Für F'_0 und F''_1 z. B. sind diese Verwandtschaften (J_{25}) und (J_{34}). Einer Gerade q entspricht eine sie treffende Gerade q, und zwar, wie wir sehen werden, eine solche mit ungleichem Querstriche. Dem Quintupel $Q'_{0,1}$ entspricht in (J_{34}) das Quintupel $Q''_{1,1}$, das heisst, dem ausgezeichneten Quintupel von F'_0 entspricht das ausgezeichnete von F''_1. Der Gerade $\overline{q}'_{0,1}$ entspricht daher die sie treffende Gerade $\overline{q}''_{1,1}$ (Nr. 82 Satz II). Beide treffen sich wirklich in der Homologieebene ε_{34}, denn sie treffen sich auf $d_{25,34}$, und die Verbindungsebene beider geht wirklich durch das Homologiezentrum E_{34}, denn sie treffen sich in gleicher Ebene mit $\delta_{25,34}$. — Fast ebenso einfach ist die Entscheidung bei den nicht ausgezeichneten Geraden q. Dem Quintupel $Q'_{0,2}$ entspricht $Q''_{1,2}$. $\overline{q}'_{0,2}$ trifft nun aber beide Geraden $q''_{1,2}$. Da sie jedoch die $\overline{q}''_{1,2}$ auf $s_{1,25}$, also in ε_{34}, trifft und nicht auch $\overline{q}''_{1,2}$ in ε_{34} treffen darf, weil sie sonst ganz in diese Ebene hineinfiele, so ist klar, dass ihr die $\overline{\overline{q}}''_{1,2}$ entsprechen muss. Ähnlich lässt sich für die Ge-

raden $q'_{0,3}$, $q'_{0,4}$, $q'_{0,5}$ beweisen, dass ihnen in (J_{34}) Geraden q'_1 mit ungleichem Querstriche entsprechen.

85. Nehmen wir einmal an, $Q'_{0,2}$ hätte in noch einer Verwandtschaft (J) eins der Quintupel von F''_1 als entsprechendes, dann könnte, da jede der Geraden $q'_{0,2}$ ausser den $q''_{1,2}$ nur noch $\overset{u}{q}''_{1,5}$ trifft, dem $Q'_{0,2}$ nur $Q''_{1,5}$ entsprechen. Und wirklich, diese beiden Quintupel sind entsprechend in (J_{25}), deren Zeiger das zweite Vertauschungspaar ist. Zugleich haben wir erkannt, dass dem Quintupel $Q'_{0,2}$ kein drittes auf F''_1 in einer Verwandtschaft (J) entspricht. Es ist nun klar, dass der Gerade $q'_{0,1}$ in (J_{25}) die $\overset{u}{q}''_{1,5}$ entspricht, und dass überhaupt jeder der nicht ausgezeichneten Geraden q'_0 eine Gerade $\overset{u}{q}''_1$ entspricht. Verallgemeinern wir, so haben wir den Satz:

Je zwei Flächen F'_i *und* F''_k *sind entsprechend in denjenigen beiden Verwandtschaften (J), welche als Zeiger eins der Vertauschungspaare der Anordnungen* A''_i *und* A''_k *haben.*

Transformieren wir ein Quintupel durch alle 10 involutorischen Homologieen (J), so kommen wir immer auf Quintupel mit entgegengesetztem Akzente:

Keine 2 Quintupel mit gleichem Akzente entsprechen einander in einer Verwandtschaft (J).

86. Da wir ausserdem wissen, dass jedem nicht ausgezeichneten Quintupel zweier Flächen F'_i, F''_k 2 Quintupel der andern Fläche in involutorischen Homologieen entsprechen, und da wir uns noch überzeugen, dass die ausgezeichneten Quintupel zweier solcher Flächen einander in zwei solchen Verwandschaften entsprechen, — denen, welche die beiden Vertauschungspaare als Zeiger haben — so können wir den Satz aussprechen:

Jedes Quintupel $Q_{i,j}$ *wird durch die 10 Verwandschaften (J) in 9 Quintupel* $Q^u_{k,l}$ *(k = i) übergeführt. Es geht durch 2 gewisse von unsern involutorischen Homologien in ein und dasselbe Quintupel* $Q^u_{k,j}$ *über, und zwar sind diese Quintupel*

$Q_{i,j}$ *und* $Q^{u}_{k,j}$ *für die Flächen* F_i *und* F^{u}_{k} *die ausgezeichneten Quintupel im Sinne von Nr. 79. Auf jeder der 4 andern Flächen* F^{u}_{k} *gibt es 2 Quintupel, welche dem* Q_{ij} *in Verwandtschaften (J) entsprechen. In allen Fällen aber entsprechen sich Geraden* q *mit ungleichen Querstrichen.*

87. Das Produkt $(A_i)\,(A_k)$, wo A_i und A_k gleiche Akzente haben, ist keine involutorische Verwandtschaft, also nicht kommutativ. Es entspricht in ihm zwar der Fläche F_i die F_k, aber nicht der F_k, als Fläche des ersten Raumes gerechnet, die F_i im zweiten. Gleichwohl werden wir auch für je 2 Flächen F mit demselben Akzente finden, dass sie sich in einer involutorischen Kollineation entsprechen. Zwei zu solchen Flächen gehörende Anordnungen besitzen 2 Transpositionspaare (Nr. 27). Durch gleichzeitige Vertauschung der Elemente jedes der Paare miteinander geht die eine Anordnung in die andre über. Machen wir die Transpositionspaare zu Zeigerpaaren einer Verwandschaft (W), so sehen wir, dass durch diese windschiefe Involution jede der beiden Flächen in die andere übergeht. So geht durch $(W_{23,45})$ die F'_0 in F'_1 über. — Jedes Quintupel von F'_0 wird in eins von F'_1 übergeführt: es fragt sich, in welcher Weise die zugehörigen Geraden q einander entsprechen. Es ist $(W_{23,45}) = (J_{23})\,(J_{45})$. Da nun der Gerade $\overline{q'_{0,1}}$ in (J_{23}) nach dem in Nr. 86 abgeleiteten Satze die $\overline{q''_{5,1}}$ und dieser in (J_{45}) die $\overline{q'_{1,1}}$ entspricht, und da ganz genau auf dieselbe Weise jede andere Gerade $q_{i,j}$ in eine $q_{k,l}$ übergeht mit gleichem Akzente und gleichem Querstriche, so gilt ganz allgemein, dass zwei in einer Verwandtschaft (W) einander entsprechende Geraden $q_{i,j}$ gleichen Akzent und gleichen Querstrich besitzen.

Ebenso wie durch die obige windschiefe Involution (W) gehen die Flächen F_i und F_k auch durch diejenige ineinander über, welche als Zeigerpaar die beiden übrigen Vertauschungspaare (Nr. 27) ausser den Transpositionspaaren besitzen. Wir erhalten den Satz:

Je zwei Flächen F_i F_k *mit gleichen Akzenten werden durch 2 der windschiefen Involutionen (W) ineinander über-*

geführt. Die eine hat als Zeigerpaare die beiden Transpositionspaare (Nr. 27), die andre hat als Zeigerpaare die beiden übrigen Vertauschungspaare von A_i *und* A_k . *Jeder Gerade* q *auf einer der beiden Flächen entspricht eine Gerade mit demselben Querstriche auf der andern.*

88. Wir sehen, dass eine Fläche F_i durch 10 windschiefe Involutionen (W) in die 5 gleichakzentuierten Flächen F übergeführt wird. Es ergibt sich nun, dass alle 5 übrigen Verwandschaften (W) die F_i in sich selbst transformieren. Nehmen wir z. B. F'_0, so wird diese durch $(W_{25,34})$, $(W_{13,45})$, $(W_{15,24})$, $(W_{12,35})$, $(W_{14,23})$ in sich selbst übergeführt, das heisst, durch die 5 Verwandtschaften (W), welche als Zeiger die Zeiger der 5 Diagonalen d auf F'_0 haben, also:

Einer Fläche F_i *entspricht in jeder der windschiefen Involutionen (W) eine Fläche* F_k *mit gleichem Akzente. Für 5 dieser Verwandschaften ist* $k = i$, *für jede der übrigen 10 ist* $k \gtrless i$.

Ganz allgemein haben wir nun erkannt, wenn wir auch die Regeln in Nr. 38 und 44 zu Hilfe nehmen:

Jeder von den 132 Geraden q *entspricht in einer Verwandschaft (J) eine Gerade q mit ungleichem Querstriche, in einer Verwandtschaft (W) eine Gerade* q *mit gleichem Querstriche.*

89. Wir betrachten die Geraden q auf F'_0 und F'_1. Die Gerade q_0 trifft ausser $\overline{q_1}$ keine Gerade q'_1. Ausgezeichnet (Nr. 79) sind wieder die Geraden $q'_{0,1}$ und $q'_{1,1}$, welche die den beiden Flächen gemeinsame Gerade d, nämlich $d_{25,34}$, treffen. Die Geraden $q'_{0,1}$ und $q'_{1,1}$ gehören zu derselben Regelschar, denn sie treffen gemeinsam die Geraden $d_{25,34}$, k_{24}, k_{35}. Da sie nicht zusammenfallen können, so sind sie zueinander windschief. $\overline{q'_{0,1}}$ ist also windschief zu $\overline{q'_{1,1}}$ und $q'_{1,1}$. — $\overline{q'_{0,1}}$ trifft die Fläche F'_1 schon in 3 verschiednen Punkten, nämlich auf $d_{25,34}$, k_{24}, k_{35}. Soll sie noch eine Gerade q'_1 treffen, so muss es auf einer dieser Geraden geschehen. Damit ist schon erwiesen, dass $\overline{q'_{0,1}}$ windschief ist zu den Geraden $q'_{1,2}$ und den Geraden $q'_{1,5}$.

$\overline{q'_{0,1}}$ und $\overline{q'_{1,3}}$ gehen beide nach Nr. 82, Satz I durch den Punkt $\overline{q''_{2,3}}$ k_{24}. Sie treffen sich also auf k_{24}. — $\overline{\overline{q'_{1,3}}}$ müsste, wenn sie $\overline{q'_{0,1}}$ träfe, diese auch auf k_{24} treffen, müsste also $\overline{q'_{1,3}}$ treffen. Dies ist unmöglich. $\overline{q'_{0,1}}$ ist daher windschief zu $\overline{\overline{q'_{1,3}}}$. — Ebenso zeigt sich, dass $q'_{0,1}$ der $\overline{q'_{1,4}}$ auf k_{35} begegnet, denn beide gehen durch Punkt $\overline{q''_{4,2}}$ k_{35}, und gleichzeitig wird klar, dass $\overline{q'_{0,1}}$ zu $\overline{\overline{q'_{1,4}}}$ windschief ist.

90. Nun gehen wir zu den 4 nicht ausgezeichneten Geradenpaaren und nehmen $\overline{q'_{0,2}}$ als Beispiel. $\overline{q'_{0,2}}$ ist windschief zu den Geraden q_1 und $q'_{1,1}$. Sie trifft $\overline{q'_{1,1}}$ auf k_{35}, das lässt sich ebenso beweisen wie das Treffen von $\overline{q_0}'_{,1}$ mit $\overline{q'_{1,3}}$ und $\overline{q'_{1,4}}$. — $\overline{q'_{0,2}}$ treffe $\overline{q'_{1,2}}$. $\overline{q'_{1,2}}$, $\overline{q''_{1,2}}$, $\overline{\overline{q_1}}$ liegen in einer Ebene und gehen durch einen Punkt. Da $q'_{0,2}$ auch $\overline{q''_{1,2}}$ trifft, so müsste sie entweder auch in der Ebene liegen oder auch durch den Punkt gehen, auf jeden Fall also $\overline{q_1}$ treffen. Das ist unmöglich, die Annahme also falsch. — Träfe $\overline{q'_{0,2}}$ die $\overline{q'_{1,2}}$, so müsste sie, da sie ja auch $\overline{q''_{1,2}}$ trifft, der $\overline{q_1}$ begegnen. Das ist wieder unmöglich. $\overline{q'_{0,1}}$ ist windschief zu beiden $q'_{1,2}$.

$q'_{0,2}$ treffe $\overline{q'_{1,5}}$. Da $\overline{q'_{1,5}}$ die $\overline{q''_{0,2}}$ trifft, und da $\overline{q'_{0,2}}$, $\overline{q''_{0,2}}$, $\overline{\overline{q_0}}$ in einer Ebene liegen und durch einen Punkt gehen (Nr. 64), so müsste $\overline{q'_{1,5}}$ die $\overline{\overline{q_0}}$ treffen. Ebenso müsste, wenn $\overline{q'_{0,2}}$ und $\overline{\overline{q_1}'_{,5}}$ sich begegneten, letztere, weil sie auch $q''_{0,5}$ trifft (Nr. 82, Satz I), die $\overline{q_0}$ treffen. Beides ist nicht der Fall; $\overline{q'_{0,2}}$ ist auch windschief zu den $q'_{1,5}$.

In $(W_{23,45})$ entspricht der $\overline{q'_{0,2}}$ die $\overline{q'_{1,3}}$. Sollen sich diese beiden Geraden treffen, so müsste es auf $d_{23,45}$ oder $\delta_{23,45}$ geschehen, denn dies sind die Axen der erwähnten windschiefen Involution (Nr. 38). Beides ist unmöglich (Nr. 64, Satz I), das heisst, $\overline{q'_{0,2}}$ ist windschief zu $\overline{q'_{1,3}}$.

$q'_{0,2}$ und $q'_{1,3}$ begegnen beide den Geraden $q''_{4,1}$ (Nr. 82, Satz I); träfen sie sich, so könnte es entweder auf $\overline{q''_{4,1}}$ oder

auf $\overline{\overline{q}}''_{4,1}$ geschehen. Der erste Fall trete ein. Dann gingen $q'_{0,2}$, $\overline{\overline{q}}'_{1,3}$, $\overline{q}''_{4,1}$ durch einen Punkt. Die beiden letzten Geraden begegnen sich aber auf k_{24}, und da $\overline{q}'_{0,2}$ die k_{24} nicht trifft, so ist dieser Fall ausgeschlossen. Träfen sich hingegen $\overline{q}'_{0,2}$ und $\overline{q}'_{1,3}$ auf $\overline{q}''_{4,1}$, so müsste $\overline{q}'_{1,3}$ die durch $\overline{q}_0{}'_{,2}$ $\overline{\overline{q}}_4{}'_{,1}$ gehende k_{35} treffen. Auch dies ist unmöglich, folglich ist $\overline{q}'_{0,2}$ windschief zu beiden Geraden $\overline{q}'_{1,3}$.

$\overline{q}'_{0,2}$ treffe $\overline{q}'_{1,4}$. Beide Geraden schneiden die k_{35}, aber in verschiednen Punkten, denn $\overline{q}'_{0,2}$ geht durch $\overline{q}'_{1,1}$ k_{35}. Unsere Geraden müssten daher mit k_{35} in einer Ebene liegen. Dann träfe aber z. B. $\overline{q}'_{0,2}$ die $\overline{\overline{q}}'_{1,1}$, welche $\overline{q}'_{1,4}$ k_{35}, zum vollen ebenen Schnitte von F'_1 ergänzt. Unsre Annahme ist also falsch. — $q'_{0,2}$ treffe schliesslich $\overline{\overline{q}}'_{1,4}$. $\overline{q}'_{0,2}$ geht durch Punkt $\overline{q}''_{3,4}$ k_{35} und $\overline{\overline{q}}'_{1,4}$ durch $\overline{q}''_{3,1}$ k_{35}. Die beiden Geraden müssten also wieder mit k_{35} in derselben Ebene liegen. $\overline{\overline{q}}'_{1,4}$ und k_{35} liegen nun mit $\overline{q}'_{1,1}$ in derselben Ebene, ebenso $\overline{q}'_{0,2}$ und k_{35} mit $\overline{\overline{q}}'_{0,1}$. $\overline{q}'_{1,1}$ und $\overline{\overline{q}}'_{0,1}$ müssten sich also treffen. Auch dies ist unmöglich, folglich trifft $\overline{q}_0{}'_{,2}$ auch die $\overline{\overline{q}}'_{1,4}$ nicht. Damit haben wir erkannt:

Die Gerade $\overline{q}'_{0,2}$ trifft $\overline{q}'_{1,1}$ auf k_{35} und sonst keine Gerade q'_1.

91. Entsprechendes gilt für $\overline{\overline{q}}'_{02}$. Ganz ähnliche Betrachtungen wie bei den $q'_{0,2}$ zeigen uns auch, dass $q'_{0,5}$ die $q'_{1,1}$ auf k_{24} trifft, aber windschief ist zu den andern Geraden q_1'. Dem Verhalten der $q'_{0,2}$ zu den $q'_{1,1}$, $q'_{1,2}$, $q'_{1,3}$, $q'_{1,4}$, $q'_{1,5}$ entspricht das Verhalten der $q'_{0,5}$ zu den $q'_{1,1}$, $q'_{1,5}$, $q'_{1,4}$, $q'_{1,3}$, $q'_{1,2}$. — Vertauschen wir die beiden Flächen, so entspricht dem Verhalten der $q'_{0,1}$, $q'_{0,2}$, $q'_{0,5}$ zu den Geraden q'_1 das Verhalten der $q'_{1,1}$, $q'_{1,3}$, $q'_{1,4}$ zu den Geraden q'_0. Die Beweise über Treffen und Nichttreffen sind den obigen analog.

92. Wir nehmen jetzt $q'_{0,3}$. Sie ist nach dem oben Gesagten windschief zu den $q'_{1,1}$, $q'_{1,3}$, $q'_{1,4}$, und es bleibt also noch ihr Verhalten zu den $q'_{1,2}$ und $q'_{1,5}$ zu unter-

suchen. Die Beweise gestalten sich, obgleich die $q'_{0,3}$ den $q'_{1,2}$ gegenüber eine andre Rolle spielen wie die $q'_{0,2}$ den $q'_{1,3}$ gegenüber, in vielem ähnlich wie bei diesen Geraden.

Der $\overline{q'_{0,3}}$ entspricht in $(W_{23,45})$ die $\overline{q'_{1,2}}$. Da keine von beiden die Axen $d_{23,45}$ oder die $\delta_{23,45}$ trifft, so sind sie windschief zueinander. — Die $\overline{q'_{0,3}}$ treffe $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$. Die Unmöglichkeit ergibt sich hier ähnlich wie die bei $q'_{0,2}$ und $\overline{\overline{q'_{1,3}}}$. Da unsre Geraden beide das Dupel $q''_{5,2}$ treffen, so müsste entweder die $\overline{q'_{0,3}}$ der $s_{3,12}$ oder die $\overline{\overline{q'_{1,2}}}$ der k_{14} begegnen. Beides ist nicht möglich, die Annahme also falsch.

Der $\overline{q'_{0,3}}$ entspricht in $(W_{24,35})$ die $\overline{q'_{1,5}}$. Auch sie treffen sich also nicht. — $\overline{q'_{0,3}}$ treffe $\overline{q'_{1,5}}$. $\overline{q'_{0,3}}$ begegnet der $\overline{q''_{3,3}}$ nach Nr. 82, Satz II auf $d_{15,24}$; $\overline{\overline{q'_{1,5}}}$ begegnet der $\overline{\overline{q''_{3,3}}}$ nach No. 82, Satz I auf k_{12}. Da $d_{15,24}$ und k_{12} windschief sind, so müssten also $\overline{q'_{0,3}}$, $\overline{\overline{q'_{1,5}}}$, $\overline{q''_{3,3}}$ in einer Ebene liegen. $\overline{q'_{0,3}}$ und $\overline{q''_{3,3}}$ werden aber beide von $\delta_{15,24}$ getroffen, und zwar liegen sie mit ihr in einer Ebene, da andernfalls $\delta_{15,24}$ der $d_{15,24}$ begegnete. Da aber $\delta_{15,24}$ die $q'_{1,5}$ nicht treffen darf (No. 64, Satz I), so erweist sich die Annahme als falsch. Die Geraden $q'_{0,3}$ sind daher windschief zu allen Geraden q'_1. — Entsprechend ist zu beweisen, dass die $q'_{0,4}$ windschief sind zu allen q'_1. — Nun können wir wieder allgemeine Regeln aufstellen.

93. Die ausgezeichnete Ziffer (Nr. 26) zweier Anordnungen mit gleichem Akzente sei m. Wir können dann die beiden Anordnungen so hinschreiben:

$$\begin{matrix} i & n & m & l & k \\ n & i & m & k & l, \end{matrix}$$

wo i k l m n die eine Anordnung ist. Hat nun diese Anordnung als Zeiger r, die zweite s, so gilt die Regel:

I. $q_{r,m}$ *trifft* $q_{s,i}$ *auf* k_{kn}
und $q_{s,k}$ *auf* k_{il}.

Zu den andern Geraden q_s *ist* $q_{r,m}$ *windschief.* — So trifft $\overline{q''_{1,5}}$ die $\overline{q''_{4,2}}$ auf k_{14} und die $\overline{q''_{4,4}}$ auf k_{23}.

II. *Die Geraden* $q_{r,i}$, $q_{r,k}$, $q_{r,l}$, $q_{r,n}$ *sind zu den* $q_{s,i}$, $q_{s,k}$, $q_{s,l}$, $q_{s,n}$ *windschief.* Regel I sagt uns, wie sie sich zu den $q_{s,m}$ verhalten.

Auf Tafel III sind alle Fälle zusammengestellt, in denen Geraden q einander treffen.

94. Zwei zu sich ergänzenden Anordnungen gehörende Flächen F_i haben ein Quintupel von Geraden d mit den beiden sie treffenden Geraden q gemein. Diese 7 Geraden gelten als Raumkurven neunter Ordnung (Nr. 66):

Der durch je zwei Flächen F'_i *und* F''_i *unsrer Gruppe von 12 Flächen bestimmte Büschel von Flächen dritter Ordnung hat als Grundkurve das Quintupel* Q_i *mit seinen beiden Treffgeraden. Längs dieser beiden Geraden berühren sich alle Flächen des Büschels. Alle 6 Grundkurven liegen auf einer Fläche dritter Klasse, der Fläche* Φ.

95. Zwei Flächen F'_i, F''_k, die also verschiedne Zeiger und Akzente haben, besitzen 5 gemeinsame Geraden, 1 Diagonale d, 3 Kanten, 1 Gerade s. Diese 5 Geraden bilden 2 volle ebene Schnitte, die beide die Gerade d enthalten. Z. B. haben F'_0 und F''_1 die Geraden $d_{25,34}$, k_{13}, k_{14}, k_{25}, $s_{1,25}$ gemein, welche die beiden vollen ebenen Schnitte $d_{25,34}$, k_{13}, k_{14} und $d_{25,34}$ k_{25}, $s_{1,25}$ in den Ebenen ε_{25} bzw. ε_{34} bilden. Die Flächen schneiden sich also ferner in einer R^4, für die sich sofort viele Sekanten angeben lassen. Wir wollen sie einmal für unsre beiden Flächen zusammenstellen.

96. Auf der den Flächen F'_0 und F''_1 gemeinsamen Gerade $d_{25,34}$ haben wir im Punkte P_1 zwei zusammenfallende, in den Punkten D_{25} und $S_{1,25}$ (Nr. 11) die beiden weiteren Doppelpunkte der Gesamtschnittkurve (Nr. 65). Auf jeder der Geraden k_{13}, k_{14}, k_{25}, $s_{1,25}$ aber haben wir erst 2 Doppelpunkte. Die R^4 trifft also die $d_{25,34}$ garnicht und hat die Geraden k_{13}, k_{14}, k_{25}, $s_{1,25}$ als Doppelsekanten.

97. Die folgenden Sekantensätze ergeben sich sehr einfach aus den Treffbeziehungen der Geraden der beiden Flächen. Nur bei einigen Beispielen führen wir die Gründe an.

Die Geraden $d_{13,45}$, $d_{15,24}$, $d_{12,35}$, $d_{14,23}$ sind einfache Sekanten der R^4, denn z. B. $d_{13,45}$, eine Gerade von F'_0, geht durch die Punkte P_2 und D_{13} des in Geraden zerfallenden Teiles der Schnittkurve. Der dritte Punkt, den sie mit F''_1 gemein hat, ist D_{45}; denn dieser liegt auf F'_0 als Punkt von $d_{13,45}$, auf F''_1 als Punkt von $d_{12,45}$, gehört also der Schnittkurve an, und da er nicht auf dem zerfallenden Teile liegt, so ist er ein Punkt der R^4. Ebenso sind D_{24}, D_{35}, D_{23} Punkte von R^4.

$d_{14,35}$, $d_{12,45}$, $d_{15,23}$, $d_{13,24}$ sind einfache Sekanten und zwar in den Punkten D_{35}, D_{45}, D_{23}, D_{24} der R_4.

k_{24} ist einfache Sekante durch D_{24},
k_{35} ist einfache Sekante durch D_{35},
k_{23} ist einfache Sekante durch D_{23},
k_{45} ist einfache Sekante durch D_{45};

$s_{2,13}$ liegt auf F'_0. Sie trifft $s_{1,25}$ im Punkte D_{12} und die k_{13} in E_{13} (Nr. 5), also die R^4 einmal, nämlich in D_{23}. Ebenso ist $s_{2,14}$ einfache Sekante durch D_{24}. $s_{3,24}$ liegt auf F'_0. Sie trifft $d_{25,34}$ in D_{34} und die andern Geraden des zerfallenden Teiles der Schnittkurve nicht. Sie trifft also die R^4 2 Mal, davon das eine in D_{23}. Ebenso ergibt sich

$s_{3,45}$ ist Doppelsekante durch D_{35},
$s_{4,35}$ ist Doppelsekante durch D_{45},
$s_{4,23}$ ist Doppelsekante durch D_{24};
$s_{5,14}$ ist einfache Sekante durch D_{45},
$s_{5,13}$ ist einfache Sekante durch D_{35}.

Jetzt nehmen wir die Geraden q. $\overline{q_0}$ ist Doppelsekante, denn sie trifft nur die Geraden $\overline{\overline{q_1}}$ und $d_{25,34}$ von F''_1 und zwar beide in demselben Punkte (Nr. 39, Satz II). Ebenso sind $\overline{\overline{q_0}}$, $\overline{q_1}$, $\overline{\overline{q_1}}$ Doppelsekanten und aus ähnlichen Gründen die $q'_{0,1}$ und $q''_{1,1}$.

$\overline{q'_{0,2}}$ trifft $s_{1,25}$ und k_{14}, und zwar dort, wo sie der $\overline{q''_{1,2}}$, bzw. der $\overline{\overline{q''_{1,5}}}$ begegnet (Nr. 82, Satz II). Daher ist sie einfache Sekante der R_4. Ihr Stützpunkt ist der Schnitt mit $\overline{q''_{1,2}}$. Analog finden wir

$\overline{\overline{q'_{0,2}}}$ ist einfache Sekante und trifft $\overline{\overline{q''_{1,2}}}$ auf R^4.
$\overline{q'_{0,3}}$ ist einfache Sekante und trifft $\overline{q''_{1,4}}$ auf R^4.
$\overline{\overline{q'_{0,3}}}$ ist einfache Sekante und trifft $\overline{\overline{q''_{1,4}}}$ auf R^4.
$\overline{q'_{0,4}}$ ist einfache Sekante und trifft $\overline{\overline{q''_{1,3}}}$ auf R^4.
$\overline{\overline{q'_{0,4}}}$ ist einfache Sekante und trifft $\overline{q''_{1,3}}$ auf R^4.
$\overline{q'_{0,5}}$ ist einfache Sekante und trifft $\overline{q''_{1,5}}$ auf R^4.
$\overline{\overline{q'_{0,5}}}$ ist einfache Sekante und trifft $\overline{\overline{q''_{1,5}}}$ auf R^4.

Hiermit ist schon gesagt, dass auch die $q''_{1,2}$, $q''_{1,3}$, $q''_{1,4}$, $q''_{1,5}$ einfache Sekanten sind.

Wir haben also unter den 49 Geraden der beiden Flächen nur eine, $d_{25,34}$, welche R^4 nicht trifft, 32, welche sie einmal treffen, 16, welche sie zweimal treffen. Ferner kennen wir 12 Punkte der Kurve, 4 Punkte D und 8 Punkte, in welchem sich Geraden q schneiden. Die Punkte D sind diejenigen 4, deren Ziffernpaare in der einen der beiden Anordnungen A'_0, A''_1 benachbarte, in der andern nicht benachbarte Ziffern enthalten. Es lässt sich der Satz aussprechen:

Die 8 Punkte $q_{r,p}$ q^u_{s,p_v} (*Nr. 82*) *und die 4 Punkte D, deren Ziffernpaare in der einen der beiden Anordnungen* A_r , A^u_s *benachbart, in der andern nicht benachbart sind, liegen auf einer Raumkurve vierter Ordnung, von der wir gleich erkennen werden, dass sie erster Art ist.*

98. Die 5 Geraden $d_{25,34}$ k_{13}, k_{14}, k_{25}, $s_{1,25}$ und die R^4 bilden die volle Schnittkurve 9. Ordnung zweier Flächen 3. Ordnung. Diese Kurve 9. Ordnung ist also Grundkurve eines ganzen Büschels von F^3. Da $d_{25,34}$, k_{13}, k_{14} einen vollen ebenen Schnitt bilden, so muss auch eine Fläche des Büschels existieren, welche in die Ebene dieses Schnittes und in eine F^2 zerfällt; diese aber muss ja dann durch das Geradenpaar k_{25} $s_{1,25}$ und durch R^4 gehen. Damit ist erkannt, dass die R^4 von der ersten Art ist.

Wir können auch so sagen: Die R^4 und der Restschnitt haben 8 Begegnungspunkte (Nr. 96), nämlich auf jeder Gerade des zerfallenden Schnittes zwei. Auch das ist hin-

reichender Beweis dafür, dass die nicht zerfallende Kurve eine R^4 erster Art ist.

Die Schnittkurve zweier ungleich akzentuierten und mit verschiedenen Zeigern versehenen Flächen unsrer Gruppe besteht aus einer Diagonale d, 3 Kanten k, einem Diagonalstrahl s und einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art. Die Gerade d ist die Gegengerade[1]) *der* R^4.

99. Unsre Flächengruppe liefert uns 30 solche Kurven. Mit $R_{i,k}$ bezeichnen wir die Restschnittkurve von F'_i und F''_k, mit $R_{k,i}$ diejenige von F''_i und F'_k. Wir betrachten nun die beiden Kurven $R_{0,1}$ und $R_{1,0}$. Es ergeben sich dieselben 4 Punkte D als auf beiden Kurven liegend, und es entsteht die Frage, ob sie noch einen weitern Punkt, U, ausser D_{23}, D_{24}, D_{35}, D_{45} gemein haben können. U gehörte dann allen 4 Flächen an, also auch dem Schnitte F'_0 F''_0, das heisst, U muss entweder auf einer der Diagonalen d von Q_0 oder auf einer der beiden Geraden q_0 liegen. Auf $d_{25,34}$ kann U nicht liegen, da diese Gerade ja den beiden Raumkurven nicht begegnet. Läge U aber auf einer der andern 5 Geraden d, so wäre diese Doppelsekante beider R^4. Wir wissen, dass sie nur einfache ist. U liegt daher auf keiner der Geraden von Q_0. Es liege nun U etwa auf $\overline{q_0}$. U ist auch Punkt des Schnittes F'_1 F''_1. Da er auch hier keiner der Geraden des Quintupels Q_1 angehören darf, so müsste er auf einer der Geraden q von F''_1 liegen. Da er schon auf q_0 liegt, so kann er nicht auf q_1 sondern müsste auf $\overline{q_1}$ liegen. Der Punkt $\overline{q_0}$ q_1 befindet sich aber auf $d_{25,34}$, auf der ja U nicht liegen kann. U darf daher nicht auf $\overline{q_0}$ und ebenso nicht auf $\overline{q_0}$ liegen. Damit ist erkannt, dass die Kurven $R_{0,1}$ und $R_{1,0}$ keinen Punkt ausser den 4 Punkten D gemein haben.

Jedes der 15 Kurvenpaare $R_{i,k}$, $R_{k,i}$ *besitzt 4 Begegnungspunkte der beiden Bestandteile, und zwar sind das diejenigen Punkte D, deren Ziffernpaare in der einen von den beiden*

[1]) Sturm, Flächen 3. Ordnung, Nr. 25.

Anordnungen A'_i *und* A''_k *oder, was dasselbe ist,* A''_i *und* A'_k *, benachbarte Ziffern, in der andern nicht benachbarte Ziffern enthalten. Ausser in diesen 4 Punkten begegnen sich die Kurven eines Paares nicht.*

100. Zwei Flächen mit gleichem Akzente haben 3 windschiefe Geraden gemein, und zwar eine Gerade d und 2 Geraden k; z. B. liegen auf F'_0 und F'_1 die Geraden $d_{25,34}$, k_{24}, k_{35}, welche windschief sind. Zwei solche Flächen haben noch eine R^6 gemein, welche unter den Geraden jeder der beiden Flächen 3 vierfache, 6 dreifache, 9 zweifache, 6 einfache Sekanten besitzt und ausserdem 3 Geraden, welche sie garnicht treffen [1]). Auf unsern Flächen bekommen wir folgendes:

$d_{25,34}$, k_{24}, k_{35} sind vierfache Sekanten.

Die Geraden $s_{2,13}$, $s_{5,14}$, $q'_{0,3}$, $q'_{0,2}$, von F'_0 und die Geraden $s_{3,12}$, $s_{4,15}$, $q'_{1,2}$, $q'_{1,5}$ von F'_1 sind dreifache Sekanten.

Die Geraden $d_{13,45}$, $d_{14,23}$, $s_{1,25}$, q_0, $q'_{0,2}$, $q'_{0,5}$ von F'_0 und die Geraden $d_{13,45}$, $d_{15,23}$, $s_{1,34}$, q_1, $q'_{1,3}$, $q'_{1,4}$ von F'_1 sind Doppelsekanten.

$d_{15,24}$, $d_{12,35}$, k_{13}, k_{14}, $s_{3,24}$, $s_{4,35}$, von F'_0 und $d_{14,35}$, $d_{13,24}$, k_{12}, k_{15}, $s_{2,35}$, $s_{5,24}$ von F'_1 sind einfache Sekanten.

Schliesslich sind die Geraden k_{25}, $q'_{0,1}$ von F'_0 und k_{34}, $q'_{1,1}$ von F'_1 keine Sekanten.

Wir bekommen 6 Punkte D auf R^6, nämlich D_{12}, D_{13} D_{14}, D_{15}, D_{23}, D_{45}. Also:

Zwei gleich akzentuierte Flächen F_i , F_k *unsrer Gruppe durchschneiden sich in 3 windschiefen Geraden, nämlich einer Gerade d und 2 Geraden k, sowie in einer Raumkurve sechster Ordnung, welche dnrch 6 Punkte D geht. Um die Ziffernpaare dieser Punkte D zu erhalten, suchen wir zunächst die ausgezeichnete Ziffer der zu den beiden Flächen gehörigen Anordnungen und stellen sie mit den 4 übrigen Ziffern zu 4 Paaren zusammen; ferner nehmen wir noch die beiden Transpositionspaare (Nr. 27).*

---

[1]) Sturm, Fl. 3 Ordn., Nr. 63, S. 201.

101. Wenn wir nun mit $R'_{ik} = R'_{ki}$ den Restbestandteil von F'_i und F'_k, mit R''_{ik} den von F''_i und F''_k bezeichnen, so erhellt, dass je 2 Kurven R'_{ik}, R''_{ik} 4 Punkte D gemein haben. Es erhebt sich wieder die Frage, ob noch weitere Treffpunkte R'_{ik} R''_{ik} vorhanden sind.

Die Korrespondenz [2,2] zwischen den Punkten einer Gerade, die durch 2 Flächen dritter Ordnung bestimmt wird (Nr. 65), und deren Koinzidenzen die 4 Schnittpunkte der Gerade mit der weitern Schnittkurve der beiden Flächen sind, kann als Projektivität zwischen den Punktepaaren zweier Involutionen aufgefasst werden[1]). Denn drehen wir eine Ebene um die Gerade, so gehören die Paare ihrer Berührungspunkte in bezug auf jede der Flächen einer Involution an.

Bezeichnen wir eine Involution mit den Doppelpunkten M_1, M_2 durch (M_1, M_2), so erzeugen sowohl die Flächen F'_0 und F'_1 als auch die Flächen F''_0 und F''_1 eine Projektivität zwischen den Involutionen (P_1, D_{34}) und (P_1, D_{25}); denn es ist z. B. P_1 Doppelpunkt der durch F'_0 auf $d_{25,34}$ erzeugten Involution, weil k_{13} und k_{14} mit $d_{25,34}$ in derselben Ebene ε_{25} liegen und sich im Punkte P_1 von $d_{25,34}$ schneiden, und D_{34} ist Doppelpunkt derselben Involution, weil $s_{3,24}$ und $s_{4,35}$ mit $d_{25,34}$ in Ebene $\tau_{24,35}$ liegen und sich im Punkte D_{34} von $d_{25,34}$ schneiden. Die beiden Projektivitäten, die wir bezw. mit (Π') und (Π'') bezeichnen, sind also Verwandtschaften zwischen denselben Trägern, wenn wir unter Trägern die einstufigen Gebilde der Punktepaare der Involutionen (P_1, D_{34}) und (P_1, D_{25}) verstehen. Können wir nun 3 Paare entsprechender Elemente, d. h. entsprechender Punktepaare, angeben, welche beiden Projektivitäten gemeinsam sind, so dürfen wir auf Identität der (Π') und (Π'') schliessen.

Durch $d_{25,34}$ gehen nun die ε_{25}, ε_{34}, $\tau_{24,35}$, welche in bezug auf F'_0 bezw. die Berührungspunktepaare P_1, P_1; D_{25}, $S_{1,25}$; D_{34}, D_{34} und in bezug auf F'_1 bezw. die Be-

[1]) Ueber solche Korrespondenzen [2,2] vergleiche man Sturm, Liniengeometrie Nr. 17.

rührungspunktepaare D_{34}, $S_{1,34}$; P_1, P_1; D_{25}, D_{25} haben. Es entsprechen sich also in (Π') die Punktepaare:

P_1, P_1 und D_{34}, $S_{1,34}$;
D_{25}, $S_{1,25}$ und P_1, P_1;
D_{34}, D_{34} und D_{25}, D_{25}.

Die Ebenen ε_{25}, ε_{34}, $\tau_{25,45}$ haben in bezug auf F''_1 die Berührungspunktepaare P_1, P_1; D_{25}, $S_{1,25}$; D_{34}, D_{34}, in bezug auf F''_0 die Paare D_{34}, $S_{1,34}$; P_1, P_1; D_{25}, D_{25}. Die oben angeführten 3 Paare von entsprechenden Elementen der Projektivität (Π') sind also auch Paare entsprechender Elemente von (Π''). Es ist daher $(\Pi') = (\Pi'')$. Die mit diesen beiden Projektivitäten identischen Korrespondenzen [2, 2] sind damit als gleich erkannt und haben mithin dieselben 4 Koinzidenzen. Das heisst aber, $d_{25,34}$ wird von R'_{01} in denselben Punkten getroffen wie von R''_{01}. Das kann auch so ausgesprochen werden:

Auf jeder Gerade d liegen 4 Berührungspunkte der beiden durch sie gehenden Flächen F' und 4 Berührungspunkte der beiden durch sie gehenden Flächen F''. Jene 4 sind mit diesen 4 identisch.

102. Nehmen wir nun an, R'_{01} und R''_{01} hätten ausser den bisherigen 8 Punkten noch einen neunten Punkt, U, gemein. Dieser müsste wieder auf dem Schnitte F'_0 F''_0 liegen. Auf $d_{25,34}$ kann er nicht liegen. $d_{13,45}$ ist einfache Sekante von R''_{01} in D_{13} und wäre, wenn U auf ihr läge, Doppelsekante. Das ist also unmöglich. $d_{15,24}$ ist einfache Sekante von R'_{01} in D_{15}. U darf also nicht auf ihr liegen. Ebenso ist es mit den Geraden $d_{12,35}$, $d_{14,23}$. Punkt U liege auf $\overline{q_0}$; da lässt sich genau wie in Nr. 99 zeigen, dass er auch auf $\overline{q_1}$ und damit auf $d_{25,34}$ liegen müsste. Das ist ausgeschlossen. Ausser jenen 8 Punkten haben also R'_{01} und R''_{01} keinen gemein:

Zwei Kurven R'_{ik}, R''_{ik} begegnen sich in 8 Punkten. 4 davon liegen auf der Gerade d, die den Flächen F'_i, F'_k F''_i, F''_k, gemein ist, die 4 andern sind die Punkte D, welche im Zeiger die ausgezeichnete Ziffer der Anordnungen A_i und A_k enthalten.

Inhalt.

Seite

Die elementaren Eigenschaften des räumlichen Fünfecks . . . 5

Die 12 Nullsysteme am räumlichen Fünfecke 17

Die Doppelsechs der Geraden q 33

Die 12 Spurpunkte der geraden q in einer Ebene ε_{ik} (Realität der Geraden q) 44

Die Fläche von Clebsch 48

Die Gruppe der 12 Diagonalflächen, in welche die Fläche Φ durch die 12 Nullsysteme (A'_i) und (A''_i) transformiert wird . 52

Tafel I.

Die 6 Quintupel Q
und die zugehörigen Anordnungen.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Anordnungen	
Q_0	$d_{25,34}$	$d_{13,45}$	$d_{15,24}$	$d_{12,35}$	$d_{14,23}$	A_0' 1 2 3 4 5	A_0'' 1 3 5 2 4
Q_1	$d_{25,34}$	$d_{14,35}$	$d_{12,45}$	$d_{15.23}$	$d_{13,24}$	A_1' 1 3 2 5 4	A_1'' 1 2 4 3 5
Q_2	$d_{24.35}$	$d_{13,45}$	$d_{14,25}$	$d_{15.23}$	$d_{12.34}$	A_2' 1 3 4 2 5	A_2'' 1 2 3 5 4
Q_3	$d_{23.45}$	$d_{14,35}$	$d_{15,24}$	$d_{13.25}$	$d_{12,34}$	A_3' 1 2 4 5 3	A_3'' 1 4 3 2 5
Q_4	$d_{23.45}$	$d_{15,34}$	$d_{14,25}$	$d_{12,35}$	$d_{13.24}$	A_4' 1 4 2 3 5	A_4'' 1 2 5 4 3
Q_5	$d_{24.35}$	$d_{15.34}$	$d_{12.45}$	$d_{13,25}$	$d_{14,23}$	A_5' 1 2 5 3 4	A_5'' 1 3 2 4 5

Entsprechen der Quintupel Q in den involutorischen Homologieen (J).

(J_{12})	(J_{13})	(J_{14})	(J_{15})	(J_{23})	(J_{24})	(J_{25})	(J_{34})	(J_{35})	(J_{45})
Q_0 und Q_4	Q_0 und Q_2	Q_0 und Q_5	Q_0 und Q_3	Q_0 und Q_5	Q_0 und Q_3	Q_0 und Q_1	Q_0 und Q_1	Q_0 und Q_4	Q_0 und Q_2
Q_1 und Q_5	Q_1 und Q_4	Q_1 und Q_3	Q_1 und Q_2	Q_1 und Q_2	Q_1 und Q_4	Q_2 und Q_4	Q_2 und Q_3	Q_1 und Q_3	Q_1 und Q_5
Q_2 und Q_3	Q_3 und Q_5	Q_2 und Q_4	Q_4 und Q_5	Q_3 und Q_4	Q_2 und Q_5	Q_3 und Q_5	Q_4 und Q_5	Q_2 und Q_5	Q_3 und Q_4

Entsprechen der Quintupel Q in den windschiefen Involutionen (W).

$(W_{23,45})$	$(W_{24,35})$	$(W_{25,34})$	$(W_{13,45})$	$(W_{14,35})$	$(W_{15,34})$	$(W_{12,45})$	$(W_{14,25})$	$(W_{15,24})$	$(W_{12,35})$	$(W_{13,25})$	$(W_{15,23})$	$(W_{12,34})$	$(W_{13,24})$	$(W_{14,23})$
Q_0 u. Q_1	Q_0 u. Q_1	Q_2 u. Q_5	Q_1 u. Q_3	Q_0 u. Q_2	Q_0 u. Q_2	Q_0 u. Q_3	Q_0 u. Q_3	Q_1 u. Q_5	Q_1 u. Q_2	Q_0 u. Q_4	Q_0 u. Q_4	Q_0 u. Q_5	Q_0 u. Q_5	Q_1 u. Q_4
Q_2 u. Q_5	Q_3 u. Q_4	Q_3 u. Q_4	Q_4 u. Q_5	Q_4 u. Q_5	Q_1 u. Q_3	Q_2 u. Q_4	Q_1 u. Q_5	Q_2 u. Q_4	Q_3 u. Q_5	Q_1 u. Q_2	Q_3 u. Q_5	Q_1 u. Q_4	Q_2 u. Q_3	Q_2 u. Q_3
Q_3 u. Q_3	Q_2 u. Q_2	Q_0 u. Q_0	Q_0 u. Q_0	Q_1 u. Q_1	Q_4 u. Q_4	Q_1 u. Q_1	Q_2 u. Q_2	Q_0 u. Q_0	Q_0 u. Q_0	Q_3 u. Q_3	Q_1 u. Q_1	Q_2 u. Q_2	Q_1 u. Q_1	Q_0 u. Q_0
Q_4 u. Q_4	Q_5 u. Q_5	Q_1 u. Q_1	Q_2 u. Q_2	Q_3 u. Q_3	Q_5 u. Q_5	Q_5 u. Q_5	Q_4 u. Q_4	Q_3 u. Q_3	Q_4 u. Q_4	Q_5 u. Q_5	Q_2 u. Q_2	Q_3 u. Q_3	Q_4 u. Q_4	Q_5 u. Q_5

Lebenslauf.

Ich, Adalbert Grüttner, wurde am 7. Mai 1881 in Striegau als Sohn des im Jahre 1893 verstorbenen Amtsgerichtssekretärs Adolf Grüttner geboren. Im Jahre 1886 wurde mein Vater an das Breslauer Amtsgericht versetzt. Nachdem ich 9 Jahre die evangelische Realschule 1 und drei Jahre die Oberrealschule besucht hatte, bestand ich an dieser die Reifeprüfung und wandte mich Ostern 1899 dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Universität Breslau zu. Ich hörte Vorlesungen bei den Herren Professoren:

Baumgartner, Brefeld, Ebbinghaus, Franz, Kükenthal, London, O. E. Meyer, Neumann, Rosanes, Sturm.

Ferner besuchte ich das Praktikum der Herren: O. E. Meyer und Heydweiller sowie das von Herrn Kükenthal und nahm teil an den seminaristischen Übungen der Herren Rosanes und Sturm.

Allen den genannten Herren schulde ich für die Förderung meiner Studien aufrichtigen Dank, ganz besonders aber Herrn Geheimen Regierungsrat Prof. Dr. Sturm, der mir auch für meine Dissertation fruchtbare Anregungen und wertvolle Unterstützung in reichem Masse zuteil werden liess.

Thesen.

1. Die synthetische Geometrie hat gleichgrosse Berechtigung, den Begriff imaginärer Elemente einzuführen, wie die Algebra.
2. Die Mathematik ist eine Kunst (Ausspruch von Eisenstein).
3. Der Jurisprudenz nützt eine solide Kenntnis der Mathematik mehr als eine tiefe Kenntnis der römischen Altertümer (Ausspruch von Möbius).